我國銀行信用損失評估之研究*

鍾經樊**

摘　　要

本文採用信用風險模型計算臺灣全體銀行乃至於個別銀行的經濟資本，並檢視總體經濟壓力下經濟資本的變動是否超過銀行法定資本所能承擔的範圍。所謂的信用風險模型是指針對銀行信用曝險之違約機率所建立，以處理違約機率間之相關性為主要目的的模型，我們可根據信用風險模型的估計結果採用電腦模擬的方式建立信用損失分配，再根據信用損失分配 (在一給定信賴水準下) 的風險值定義經濟資本，作為衡量各個信用曝險之風險大小的標準。本文的研究目標是根據經濟資本比較分析臺灣37家銀行以及9種放款類型信用風險的大小，並進而比較總體壓力情景下的經濟資本與2010年經濟資本的差異。

關鍵詞：信用風險、模擬損失分配、經濟資本、實證研究

* 本文係摘錄自中央銀行委託研究計畫報告。作者感謝央行金檢處潘雅慧對本研究所提供的寶貴意見與指正。文中任何錯誤皆屬作者的責任。本文所有論點皆屬作者個人意見，不代表中央銀行及作者服務單位之立場。

** 作者鍾經樊為國立清華大學教授。

壹、序 言

本文將採用信用風險模型計算臺灣全體銀行乃至於個別銀行的經濟資本，並檢視這些經濟資本在我們所設計的總體經濟壓力下所產生的變動是否超過銀行法定資本所能承擔的範圍。所謂的信用風險模型是指針對銀行信用曝險之違約機率所建立，專門處理違約機率間之相關性的模型，我們可根據信用風險模型的估計結果並利用電腦模擬的方式建立信用損失分配，再根據信用損失分配 (在一給定信賴水準下) 的風險值定義經濟資本，作為衡量各個信用曝險之風險大小的標準。

本文包括如下五個議題：

1. 信用風險模型的建置
2. 信用風險模型的估計
3. 信用損失分配的模擬
4. 2010 年經濟資本的計算
5. 總體壓力情景下經濟資本的計算

本文的研究目標是根據經濟資本比較分析臺灣37家銀行以及9種放款類型信用風險的大小，並進而比較總體壓力情景下的經濟資本與非壓力情景下經濟資本的差異。

一、風險與損失

銀行面對諸如利率風險、信用風險、市場風險、作業風險等多種風險，不論是哪一種風險，不論是哪一種風險，都有可能造成銀行資產或多或少的折損，除了判斷各種風險來源並對之進行個別控管外，銀行管理全行資產組合總風險的首要任務便是評估各種損失程度的可能性，特別是要能準確計算出可能性大的損失水準。暫時撇開多大的可能性可謂之為大的問題不談，註1我們將簡稱可能性高過某一特定水準的損失為「高風險損失」，並進一步將之劃分為「預期損失」與「未預期損失」兩部份，預期損失是指銀行資產部位中平均來說會遭到減損的數額 (亦即只要假以時日一定會發生的損失) ，而未預期損失則是指超過平均的高風險損失數額。換言之，我們可將銀行資產部位切割為低風險與高風險兩部份，再將後者劃分為預期損失與未預期損失兩個部份：

$$\text{資產部位} = \begin{cases} \text{低風險部位} \\ \text{高風險部位} = \begin{cases} \text{預期損失（＝損失準備)} \\ \text{未預期損失（＝資本)} \end{cases} \end{cases} \qquad (1)$$

對於銀行資產中高風險的預期損失部份，銀行將提列「損失準備」 (loss provisions) ，對於高風險的未預期損失部份則提列「資本」 (capital) 作為緩衝。一般而言，預期損失遠較未預期損失容易衡量，銀行可經常性的計算其預期損失，但未預期損

失的衡量則是一個困難的工作，其中除了牽涉到銀行對高低風險的主觀決定外，還牽涉到許多偶發或極端的損失事件。風險管理的最主要任務就是精確的衡量未預期損失後，提列適當的資本以為準備，再致力於獲取將風險納入考量後的極大化利潤。

銀行對其資產部位中高低風險部份的界定實際反應了銀行對風險的「態度」，亦即銀行的「風險偏好」(risk appetite) 或「風險趨避傾向」。由於銀行未對低風險資產部位提列損失準備或計提資本，一旦發生超過損失準備與資本的重大損失銀行將無法償債而倒閉，所以高低風險區界點的選取也就決定了銀行倒閉可能性的大小，一個將該界點定得較低的銀行 (例如將低風險部位的損失可能性定在 0.5% 水準)要比將該界點定得較高的銀行 (例如將低風險部位的損失可能性定在 0.1% 水準) 有較高的倒閉可能性，也就是說前者風險趨避傾向較低而有較高的倒閉可能性。由於銀行的倒閉可能性是由其本身的「信用評等」來呈現：倒閉可能性較高的前者將有較差的信用評等，而倒閉可能性較低的後者則將有較優的信用評等，亦即風險趨避傾向較低的銀行將只能得到較低的信用評等。換言之，銀行的風險偏好將同時決定資本的大小 (未預期損失) 與銀行本身的「信用評等」。

二、法定資本與經濟資本

金融監理機關會要求銀行根據自行計算的預期損失提列損失準備，並會根據某些公式估計未預期損失並進而要求銀行提列資本以承擔這些未預期損失的衝擊，這種監理機關所規定的資本計提稱為「法定資本」(regulatory capital) 。金融監理機關對銀行資產組合之未預期損失要求提列法定資本，對法定資本大小的規定則是建立在所謂的「資本計提率」上，資本計提率是指法定資本佔銀行資產組合曝險額的比例：

$$\text{資本計提率} = \frac{\text{法定資本}}{\text{曝險額}} = \frac{\text{未預期損失}}{\text{曝險額}}, \quad (2)$$

資本計提率自然應該與銀行資產組合之風險大小成正比，風險大的資產組合當然應該面對較高的資本計提率。

由 (1) 與 (2) 式的分析可知，銀行在風險管理的過程中，對任何風險性資產組合均須衡量其預期損失與未預期損失並提列對應的損失準備與資本，我們在這裡所要指出的是，預期損失與未預期損失都是由損失分配所衍生出來的概念，為計算預期損失與未預期損失我們便需引用統計分析工具以推導損失分配，而這個推導損失分配的統計分析過程中，也必須建置損失分配模型並收集相關的資料。事實上在 Basel II (新巴賽爾協議) 的規範下，金融監理機關對銀行資產組合計提法定資本所採用的資本計提率公式就是建立在一個特殊的損失分配模型以及特定的資料上。若銀行擁有大量的資料與先進的

風險管理技術，當然可以自行估計更為進階的損失分配模型，並導出更準確的未預期損失以及對應的資本，這個由銀行自行利用更多的資料估計更精深的損失分配所導出的資本，通常能較法定資本更為準確的反應銀行的風險程度，便是所謂的「經濟資本」(economic capital)。

三、信用風險

銀行的資產組合或部位中會因信用風險(違約風險)－債務人無法償債的可能性－而造成損失者稱為信用風險性資產或是信用曝險，違約通常是指逾期超過 90 天，但銀行主觀認定債務人無法償債便可視之為違約。

本文所考慮的信用曝險集中在屬於銀行資產負債表內的放款，是銀行的最主要資產部位，分為企業貸款與零售型貸款。

對銀行信用曝險的分析乃至於針對信用風險計提的法定資本與經濟資本都是建立在違約損失分配上，由多種信用風險性資產所組成之信用資產組合會因資產間的相關性而有一個複雜的損失分配，所謂的信用風險模型便是用來探討如何以一個簡單合理的方式刻畫信用風險性資產間的相關性，並進而推導出對應的損失分配，信用風險相關性的不同設定常是讓信用風險模型所導出的經濟資本異於法定資本計算的主要原因。接下來我們便要逐步介紹違約損失分配的各個層面。

我們可將每筆信用曝險的違約損失 L 分解成三個部分：

$$L \equiv d \times Q \times \text{EAD}, \tag{3}$$

其中

- d 是表示違約與否的隨機虛擬變數(即柏努利隨機變數)，亦即所謂的「違約狀態變數」，d 的期望值等於違約機率 (PD, probability of default)。
- Q 是一個數值介於 0 和 1 之間的隨機變數，代表違約所造成之損失的嚴重程度，Q 的期望值等於違約損失率 (LGD, loss given default)。
- EAD 是「違約曝險額」(exposure at default)，通常假設為一固定值。

違約損失 L 的期望值與標準差皆具特殊用途，給定 EAD 為一固定值，再假設違約狀態變數 d 與損失嚴重程度 Q 彼此獨立，則可得「預期損失」(EL, expected loss)，亦即違約損失 L 的期望值：

$$\text{E}(L) = \text{PD} \times \text{LGD} \times \text{EAD}. \tag{4}$$

這個等式是建立在違約狀態變數 d 與損失嚴重程度 Q 彼此獨立的假設上，本文中損失嚴重程度 Q 和 EAD 一樣都被假設為固定值，所以可以滿足這個假設。

信用風險的預期損失是由違約機率 (PD)、違約損失率 (LGD)、與違約曝險額 (EAD) 所組成，不論是法定資本的設定還是經濟資本的推導，都是建立在這三個重要參數值上，它們就被稱為「信用風險成分」，

將信用風險分解為三種成分並分別加以衡量之是管理信用風險的第一步。PD 代表曝險對象 (obligor) 之信用品質 (包括負債程度與償債能力) ，呈現曝險對象的如何受到產業 (企業曝險) 、年齡、職業等人口統計 (零售型曝險) 等因素的影響。LGD 則代表曝險項目 (facility) 的信用風險程度，呈現項目類型、交易目的、風險抵減 (擔保品、保證、與信用衍生性商品) 、貸放成數、帳齡、及求償順位等因素的影響。EAD 通常較 PD 與 LGD 為單純，因而常被假設為固定值。

由多筆信用曝險所組成之信用資產組合 (credit portfolio)的違約損失將是各筆信用曝險之違約損失的總和。假設一個信用資產組合是由 m 筆信用曝險所組成，則其違約損失是

$$L \equiv \sum_{i=1}^{m} L_i = \sum_{i=1}^{m} d_i \times Q_i \times \mathrm{EAD}_i, \quad (5)$$

違約損失 L 的分配便是損失分配，由於 EAD 通常假設為固定常數，所以損失分配基本上就是違約損失 L 定義中 $\sum_{i=1}^{m} d_i \times Q_i$ 部分的分配。

相對於企業型曝險的單位曝險 i 大都是個別企業，零售型曝險多採用由上而下的組合管理，換言之，零售型曝險的單位曝險 i 大都是組合而非個人，換言之，信用曝險的單位 i 不見得是個別企業或個人，也可泛指不同信用評等、貸款成數、求償順位、擔保品類別、產業、產品、規模大小、地區等之曝險對象的組合，也就是說，前述信用資產組合將是 m 個組合的組合。

做為信用資產組合中基本單位的組合 i 必須滿足如下條件：

- 基本單位組合 i 中之各曝險具顯著的同質性以及屬於同組合 i 之各曝險的 PD 、 LGD 、 EAD ，以及各曝險之間的相關性，乃至於這些統計量如何受到各種風險因子的影響以及影響的程度，都要有相當穩定的類似性
- 基本單位組合 i 中之曝險的額度與筆數不能過多，以維持曝險的穩定同質性，並使組合達到一定的「細緻程度」 (granularity)
- 基本單位組合中 i 之曝險的額度與筆數不能過少，以獲得基本單位組合 i 諸如 PD 、 LGD 、 EAD 之各種統計量的有效的估計值

根據信用資產組合 L 的定義，很容易導出對應的預期損失與標準差：信用資產組合的預期損失是：

$$\mathrm{EL} \equiv \mathrm{E}(L) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(L_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{EL}_i = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{PD}_i \times \mathrm{LGD}_i \times \mathrm{EAD}_i, \quad (6)$$

在違約狀態變數 d_i 與損失嚴重程度 Q_i 彼此獨立的假設下，各筆信用曝險 (主要是違約狀態變數 d_i) 之間相關性不影響信用資產組合的預期損失，所以也不影響損失準備的大小，所以銀行每新增一筆信用曝險，只需就該筆信用曝險提列一特定比例的損失準備。

相對於信用曝險之間的相關性不影響預期損失，這個相關性會影響信用損失分配的其他層面，尤其是其風險值 (未預期損失) ，因此對未預期損失提列法定資本的多少便須視信用資產組合的整體分配才能決定。

在分析信用資產的資本計提率前，我們可重新審視銀行資產組合曝險額的分解式 (1) 與 (2) 並指出，針對信用風險該分解式會增加一個分解項如下：只要 LGD 不是 100%，則不論違約是否發生，銀行信用資產組合的總曝險 $\sum_{i=1}^{m}\mathrm{EAD}_i$ 中的 $\sum_{i=1}^{m}(1-\mathrm{LGD}_i)\times\mathrm{EAD}_i$ 可被視為無風險部分，因此，銀行信用資產組合曝險額的分解式可改寫如下：

$$\begin{array}{c}\text{信用資產}\\\text{組合曝險}\end{array}=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{EAD}_i=\begin{cases}\text{預期損失}=\sum\limits_{i=1}^{m}\mathrm{PD}_i\times\mathrm{LGD}_i\times\mathrm{EAD}_i\\ \text{未預期損失}\\ \text{低風險資產部位}=\sum\limits_{i=1}^{m}\text{低風險曝險率}_i\times\mathrm{LGD}_i\times\mathrm{EAD}_i\\ \text{無風險資產部位}=\sum\limits_{i=1}^{m}(1-\mathrm{LGD}_i)\times\mathrm{EAD}_i\end{cases}\tag{7}$$

則資本計提率可寫成

$$\begin{aligned}\text{資本計提率}&=\frac{\text{法定資本}}{\text{曝險額}}=\frac{\text{未預期損失}}{\text{曝險額}}\\&=\frac{\text{曝險額}-\text{預期損失}-\text{低風險資產部位}-\text{無風險資產部位}}{\text{曝險額}}\\&=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(1-\text{低風險曝險率}_i-\mathrm{PD}_i)\times\mathrm{LGD}_i\times\mathrm{EAD}_i}{\sum\limits_{i=1}^{m}\mathrm{EAD}_i},\end{aligned}\tag{8}$$

若假設信用資產組合中各信用曝險均為「同質」的，亦即其低風險曝險率、 PD 、與 LGD 均相同，則上述資本計提率可簡化為

$$\text{資本計提率} = (1 - \text{低風險曝險率} - \text{PD}) \times \text{LGD}. \quad (9)$$

不論信用曝險是否同質，低風險曝險率均很受信用曝險之間相關性的影響，也就是說，未預期損失與法定資本的設定很受信用曝險之間相關性以及集中度問題 (某些信用曝險或某些特定組合的金額特別大) 的影響，如何以簡單合理的方式刻畫信用曝險間的相關性以導出信用資產組合的損失分配，以及如何導出低風險曝險率事實上就是信用風險分析的主要課題。

Basel II 在同質的假設下根據 (9) 式對銀行資產組合的信用風險提供了「內部評等法」 (IRB) 與「標準法」兩種計提法定資本的方法，前者就是藉由上述資本計提率的設定來決定法定資本的大小，而標準法則是藉由風險權數的直接設定來決定法定資本的大小，但兩種方法常會導出相當不同的法定資本，內部評等法所需的資料遠較標準法為多，其計算過程也較標準法為複雜，但通常可得到較接近真實未預期損失也較低的資本計提。

相對於 Basel II 對法定資本的前述規定，利用信用風險模型決定經濟資本的原理則是在充分考量各信用風險成份的相關性乃至於曝險集中度的影響後，根據 (8) 式計算對應的資本計提，接下來我們將簡單介紹如何明確的定義低風險曝險率。

四、風險的衡量

在本小節中我們將說明如何根據尚未違約之信用資產組合的損失分配設定資本計提率，也就是要介紹一些衡量未預期損失的方法。風險衡量是風險管理的第一步，沒有精確的風險衡量就不可能做好風險管理。

(一) 組合風險測度

風險值：給定任一信賴水準 α (例如 99%) ，我們可根據損失分配求取對應的第 α 百分位做為損失分配的「風險值」 (VaR, value-at-risk) ，換言之，風險值是某一特定的損失值，損失超過該特定損失值的機率是 α：

$$P(L \leq \text{VaR}) = \alpha,$$

經濟資本 (EC) 一般就定義為

$$\text{EC} \equiv \text{VaR} - \text{EL},$$

亦即扣除預期損失後的風險值。風險值以及對應的經濟資本直接和可能的損失大小成正比，所以可說是最合乎直覺的風險測度。

預期短缺：風險值無法表示為預期損失 (或任何條件預期損失) 的形式，亦即風險值不是一個相容的 (coherent) 風險測度，「預期短缺」 (ES, expected shortfall) 做為一個相容風險測度近年來獲得越來越多的重視，其定義是

$$\mathrm{ES} \equiv \mathrm{E}(L \mid L \geq \xi),$$

其中 ξ 是損失分配的某一給定的百分位，亦即預期短缺是在給定損失大於 ξ 值之條件下的損失預期值，乃是損失分配右尾尾端的平均值。

(二) 未預期損失

給定信賴水準 α 的風險值以及給定百分位 ξ 的預期短缺都是衡量未預期損失的方法，因而可直接將之訂為資本計提率 (8) 之分子項中如下的部分：

$$\mathrm{VaR}\ (\text{或 ES}) = \sum_{i=1}^{m} (1 - \text{低風險曝險率}_i) \times \mathrm{LGD}_i \times \mathrm{EAD}_i .$$

因此, 資本計提率 (8) 便可改寫爲

$$\text{資本計提率} = \frac{\mathrm{VaR}\ (\text{或 ES}) - \sum_{i=1}^{m} \mathrm{PD}_i \times \mathrm{LGD}_i \times \mathrm{EAD}_i}{\sum_{i=1}^{m} \mathrm{EAD}_i}. \tag{10}$$

在這個定義下，信用資產組合的曝險中大於風險值 (或預期短缺) 的部分將被視為低風險資產部位。

(三) 單位風險測度

除了衡量信用資產組合的整體風險外，我們也需要測度每一筆信用曝險 (或是任何信用曝險組合) 對資產組合風險的貢獻。

風險值貢獻：由於風險值不是相容的風險測度，不能直接使用第 i 筆信用曝險之損失的風險值，Gourieroux, Laurent, and Scaillet (2000) 與 Tasche (2000) 因而建議利用條件期望值的方法，定義如下的「風險值貢獻」：

$$\mathrm{VaRC}_i \equiv \mathrm{E}(L_i \mid L = \mathrm{VaR}),$$

在此定義下，所有信用曝險之風險值貢獻的總和正好是信用資產組合的風險值：

$$\mathrm{VaR} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{VaRC}_i .$$

風險貢獻：預期短缺做為相容風險測度的一個重要優點是容許我們根據相同的條件期望值架構，直接定義第 i 筆信用曝險的風險貢獻 (RC, risk contribution) 如下：

$$\mathrm{RC}_i \equiv \mathrm{E}(L_i \mid L \geq \xi),$$

在此定義下，所有信用曝險之風險貢獻的總和正好是信用資產組合的總風險：

$$\mathrm{ES} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{RC}_i .$$

這裡所定義之風險貢獻的總和都等於信用曝險組合全體的風險 (經濟資本) ，但我們要強調，這些風險貢獻是在考慮個別信用曝險與其他曝險之違約相關性以及集中度風險

後所求得的的風險衡量，並不只是總風險的簡單分割而已。我們可對每一筆個別信用曝險分別計算其風險，因未考慮違約相關性與集中度，由之所得的風險衡量並不會等於這裡所定義的風險貢獻，其總合也不會等於對信用曝險組合全體所計算而得的風險。

貳、違約迴歸模型與損失分配

在本節中我們將說明作為本文損失分配基礎之的信用風險模型的內容，由於損失分配相當複雜，能夠代表損失分配的公式都難以分析或做進一步的機率計算，所以我們便只能仰賴電腦的遞迴計算能力以模擬損失分配以及對應的經濟資本，本節在介紹違約模型後便會說明模擬損失分配的步驟。

假設信用曝險可分為 m 類，第 i 類信用曝險在第 t 時點的筆數是 N_{it} ，對信用曝險的違約做出如下 4 個假設：

假設一：第 i 類之 N_{it} 筆信用曝險的違約狀態 d_{iht} 都是違約機率為 p_{it} 的柏努利隨機變量：

$$d_{iht} = \begin{cases} 1 \ (\text{違約}), & \text{機率是 } p_{it}, \\ 0 \ (\text{未違約}). & \text{機率是 } 1 - p_{it}. \end{cases}$$

這裡的 p_{it} 可稱為類別違約機率。

假設二：類別違約機率 p_{it} 會受到因時而變之共同風險因子的影響因而彼此相關。

假設三：在給定違約機率 p_{it} 的條件下所有違約狀態 d_{iht} 彼此獨立。

假設四：不論違約狀態 d_{iht} 是否可觀察，假設我們可觀察到信用曝險的各類別平均違約比率：

$$\bar{d}_{it} = \frac{1}{N_{it}} \sum_{h=1}^{N_{it}} d_{iht}, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{11}$$

假設三之違約狀態 d_{iht} 的條件獨立意味著假設四中的平均違約比率 $\bar{d}_{it}$ 是違約機率 p_{it} 的不偏估計式。

假設二明確指出違約相關性源自於總體經濟系統風險因子，為使這個關係具體化，我們將以不偏估計式違約率 $\bar{d}_{it}$ 為應變量，以共同風險因子為解釋變量的線性迴歸模型來呈現這個關係，最後根據這個關係推導出違約相關性以及對應的損失分配。

採用線性迴歸模型的一個先決條件是應變量必須是一個數值不受限制的連續變量，而這裡的 $\bar{d}_{it}$ 是介於 0 和 1 之間的數值，為此我們有必要先行對其進行轉換使之成為數值沒有任何限制的連續變量。給定對 $\bar{d}_{it}$ 的轉換是：

$$q_{it} \equiv K(\bar{d}_{it}), \tag{12}$$

常用的轉換有 logit 轉換 (對數賠算比轉換) ：[註2]

$$q_{it} \equiv \ln \frac{\bar{d}_{it}}{1-\bar{d}_{it}},$$

以及 probit 轉換 (這裡的 Φ 是標準常態分配的分配函數)：

$$q_{it} \equiv \Phi^{-1}(\bar{d}_{it}).$$

接下來我們所考慮的將就只是以 qit 為應變量、以共同風險因子為解釋變量的線性迴歸模型。

一、損失分配

給定第 i 筆信用曝險在第 t 時點的違約損失率 LGD_{iht} 與違約曝險額 EAD_{iht}，定義所謂的「違約損失額」為其乘積 $\zeta_{iht} \equiv \mathrm{LGD}_{iht} \times \mathrm{EAD}_{iht}$，以及違約損失：

$$L_t = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{N_{it}} d_{iht} \cdot \zeta_{iht}. \tag{13}$$

違約損失顯然是違約狀態變量以 ζ_{iht} 為權數的加權和，因此是一個間斷型隨機變量，其分配便是所謂的「違約損失分配」或簡稱「損失分配」。損失分配最重要的性質就是等用於違約狀態變量的聯合分配：[註3]

$$\begin{aligned} P_{t-1}\left(L_t = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{N_{it}} \iota_{ih} \cdot \zeta_{iht}\right) &= P_{t-1}(d_{11t} = \iota_{11}, \ldots, d_{21t} = \iota_{21}, \ldots, d_{mN_{mt}t} = \iota_{mN_{mt}}) \\ &= \mathrm{E}_{t-1}\left[\prod_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{N_{it}} p_{it}^{\iota_{ih}}(1-p_{it})^{1-\iota_{ih}}\right], \end{aligned} \tag{14}$$

這裡的 ι_{ih} 均是 0 或 1 的給定數值，而期望值則是針對隨機機率 $p_{1t},p_{2t},\cdots,p_{mt}$ 執行。更具體的說，給定違約損失額 ζ_i，我們可將多個違約狀態變量的多變量二元分配數直接轉換成一個損失變量的間斷型損失分配，損失分配的密度函數 f_L 就是條件獨立之違約狀態變量的聯合機率：

$$f_L(\ell) = \mathrm{E}_{t-1}\left[\prod_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{N_{it}} p_{it}^{\iota_{ih}}(1-p_{it})^{1-\iota_{ih}}\right], \tag{15}$$

這裡的 $\ell \equiv \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{N_{it}} \iota_{ih} \cdot \zeta_{iht}$。

在這裡我們要指出，求導損失分配 (或是其百分位、風險值或期望值) 的最大問題在於該分配是由多個違約損失值以及對應的機率所組成，且每一個機率的計算又包含針對 m 個隨機機率 $p_{1t},p_{2t},\cdots,p_{mt}$ 的 m 重積分，很不容易計算，通常只能訴諸於電腦模擬，我們將在第 2.4 小節解釋模擬損失分配的步驟。

二、違約迴歸模型的設定

在這一小節中我們將介紹總體經濟系統風險因子影響違約機率的迴歸模型，我們還更進一步假設總體經濟系統風險因子的時間序列資料遵從一個多變量的動態模型 − VAR (vector autoregressive) 模型，以更充分

的利用系統風險因子時間序列資料的信息求導出較精準的「單時點」(point in time) 損失分配。

為簡化符號，將 m 個“類別違約機率” q_{it} 與 k 個系統風險因子 xit 的時間序列資料分別以向量形式表示：

$$\underset{m\times 1}{\mathbf{q}_t} = \begin{bmatrix} q_{1t} \\ q_{2t} \\ \vdots \\ q_{mt} \end{bmatrix}, \quad \text{與} \quad \underset{k\times 1}{\mathbf{x}_t} = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{kt} \end{bmatrix},$$

假設 $\mathbf{q}_t$ 是一個以系統風險因子 $\mathbf{x}_t$ 及其滯後項為解釋變量的線性迴歸模型，而系統風險因子 $\mathbf{x}_t$ 則是一個相當一般化的 VAR(J_2) 模型如下：[註4]

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{B}\,\mathbf{x}_t + \sum_{j=1}^{J_1} \mathbf{B}_j\,\mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{B}_\circ\,\mathbf{x}_\circ + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (16)$$

$$\mathbf{x}_t = \sum_{j=1}^{J_2} \mathbf{A}_j\,\mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{A}_\circ\,\mathbf{x}_\circ + \boldsymbol{\eta}_t, \quad (17)$$

其中階數 J_1 與 J_2 可以不同，$\mathrm{x}_\circ$ 是一個包含常數項之不隨時間改變純外生變量的向量，我們要特別強調，所有的係數矩陣 $\mathbf{B}$、$\mathbf{B}_j$、 $\mathbf{B}_\circ$、 $\mathbf{A}_j$、與 $\mathbf{A}_\circ$ 均可包含 0 元素，因此 m 個類別違約機率 q_{it} 可以受到完全不同之系統風險因子 x_{it} 及其滯後項的影響，而各個系統風險因子 x_{it} 也可受到不同系統風險因子之滯後項的影響。

三、分配假設與模型估計

我們對 (16) 式與 (17) 式兩個隨機誤差項 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 與 $\boldsymbol{\eta}_t$ 分別做出如下的統計分配假設。

- 假設 (17) 式的誤差項 $\boldsymbol{\eta}_t$ 是以 0 為期望值、以 $\boldsymbol{\Sigma}$ 為變異數共變數矩陣的 k 維常態分配：

$$\boldsymbol{\eta}_t \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}^{(k)}(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\Sigma}). \quad (18)$$

這裡的 i.i.d. (independently and identically distributed) 代表互相獨立且有完全相同的分配。

- 假設 (16) 式的誤差項 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 則是以 0 為期望值、以 $\boldsymbol{\Omega}$ 為變異數共變數矩陣的 m 維常態分配：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}^{(m)}(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\Omega}), \quad (19)$$

其中變異數共變數矩陣 $\boldsymbol{\Omega}$ 是對角矩陣：

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_{mm} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

並隨之更進一步假設 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的 m 個元素有如下的分配：

$$\varepsilon_{it} \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0,\ \omega_{ii}), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \quad (21)$$

- (16) 式的誤差項 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 所代表的是影響類別違約機率的非系統隨機衝擊，而 (17) 式的誤差項 $\boldsymbol{\eta}_t$ 代表的則是系統

風險因子自我相關趨勢之外的隨機衝擊。假設 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 與所有各期的 $\boldsymbol{\eta}_t$ 彼此獨立，因此

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\eta}_{t-j}) = \mathbf{O}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

這表示影響類別違約機率的隨機衝擊是與當期以及所有過去各期的系統風險因子完全無關的非系統衝擊。

(一) 系統風險因子的分配

根據 (18) 的分配假設以及 (17) 式，我們可導出系統風險因子的條件分配：

$$\mathbf{x}_t \,|\, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-2}, \ldots \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}_t,\ \boldsymbol{\Sigma}), \tag{23}$$

其中[註5]

$$\bar{\mathbf{x}}_t \equiv \mathrm{E}_{t-1}(\mathbf{x}_t) = \sum_{j=1}^{J_2} \mathbf{A}_j\, \mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{A}_\circ\, \mathbf{x}_\circ, \tag{24}$$

以及

$$\boldsymbol{\Sigma} \equiv \mathrm{Var}_{t-1}(\mathbf{x}_t) = \mathrm{Var}(\boldsymbol{\eta}_t). \tag{25}$$

(二) 系統風險因子的條件常態分配

我們可將 VAR 模型 (17) 式中的系統風險因子分為兩部分：

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \underset{k_1\times 1}{\mathbf{x}_{1t}} \\ \underset{k_2\times 1}{\mathbf{x}_{2t}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1i} \\ \mathbf{b}_{2i} \end{bmatrix},$$

則在系統風險因子 $\mathbf{x}_{2t}$ 以及過去信息 $\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-2}, \ldots$ 給定下之 $\mathbf{x}_{1t}$ 的條件分配將會是

$$\mathbf{x}_{1t} \,|\, \mathbf{x}_{2t}, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-2}, \ldots \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}^{(k_1)}(\bar{\mathbf{x}}^*_{1t},\ \boldsymbol{\Sigma}^*_{11}) \tag{26}$$

其中條件期望值是

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}^*_{1t} &= \mathrm{E}_{t-1}(\mathbf{x}_{1t} \,|\, \mathbf{x}_{2t}) \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{x}_{2t} + \sum_{j=1}^{J_2} (\mathbf{A}_{1j} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{2j})\, \mathbf{x}_{t-j} + (\mathbf{A}_{\circ 1} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{\circ 2})\, \mathbf{x}_\circ \qquad (27) \\ &\equiv \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{x}_{2t} + \boldsymbol{\mu}_{1t}, \qquad (28) \end{aligned}$$

條件變異數共變數矩陣是

$$\boldsymbol{\Sigma}^*_{11} = \mathrm{Var}_{t-1}(\mathbf{x}_{1t} \,|\, \mathbf{x}_{2t}) = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}, \tag{29}$$

這裡的 $\mathbf{A}_{1j}$ 與 $\mathbf{A}_{2j}$ 分別是 (17) 式中 $\mathbf{A}_j$ 係數矩陣的部份矩陣，$\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$ 是 (18) 式中變異數共變數矩陣 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的部份矩陣：

$$\underset{k\times k}{\mathbf{A}_j} = \begin{bmatrix} \underset{k_1\times k}{\mathbf{A}_{1j}} \\ \underset{k_2\times k}{\mathbf{A}_{2j}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_\circ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\circ 1} \\ \mathbf{A}_{\circ 2} \end{bmatrix}, \qquad \underset{k\times k}{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \underset{k_1\times k_1}{\boldsymbol{\Sigma}_{11}} & \underset{k_1\times k_2}{\boldsymbol{\Sigma}_{12}} \\ \underset{k_2\times k_1}{\boldsymbol{\Sigma}_{21}} & \underset{k_2\times k_2}{\boldsymbol{\Sigma}_{22}} \end{bmatrix}.$$

這裡的條件期望值 (28) 式與標準 VAR 模型設定下的 (24) 式間的差別在於多了 $\mathbf{x}_{2t}$ 項的線性式，此外，條件變異數共變數矩陣 (29) 式與標準 VAR 模型設定下的 (25) 式一

樣，都不是 $\mathbf{x}_{2t}$ 的函數。

(三) 類別違約機率的分配

根據 (19) 的分配假設，再加上誤差項 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 與系統風險因子及其滯後項 $\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \ldots$ 彼此獨立的假設，[註6] 我們可導出

$$\mathbf{q}_t \,|\, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \ldots \sim \text{i.i.d. } \mathcal{G}^{(m)}(\boldsymbol{\mu}_t, \boldsymbol{\Omega}), \quad (30)$$

其中條件期望值向量是

$$\boldsymbol{\mu}_t \equiv \mathrm{E}(\mathbf{q}_t \,|\, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \ldots) = \mathrm{E}_{t-1}(\mathbf{q}_t \,|\, \mathbf{x}_t) = \mathbf{B}\,\mathbf{x}_t + \sum_{j=1}^{J_1} \mathbf{B}_j\,\mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{B}_\circ\,\mathbf{x}_\circ, \quad (31)$$

條件變異數共變數矩陣是

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{Var}_{t-1}(\mathbf{q}_t \,|\, \mathbf{x}_t) = \mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t). \quad (32)$$

(四) 損失與違約的動差

損失分配 (14) 及其密度函數 (15) 雖難以深入分析，但若能導出給定違約損失額 ζ_{iht} 下的違約期望值 $\mathrm{E}_{t-1}(d_{iht})$、違約變異數 $\mathrm{Var}_{t-1}(d_{iht})$、與違約共變數 $\mathrm{Cov}_{t-1}(d_{iht}, d_{jgt})$，則就可進一步研究損失的條件期望值

$$\mathrm{E}_{t-1}(L_t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{N_{it}} \mathrm{E}_{t-1}(d_{iht})\cdot \zeta_{iht},$$

與條件變異數

$$\mathrm{Var}_{t-1}(L_t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{N_{it}} \mathrm{Var}_{t-1}(d_{iht})\cdot \zeta_{iht}^2 + \sum_{i\neq j}\sum_{h\neq g} \mathrm{Cov}_{t-1}(d_{iht}, d_{jgt})\cdot \zeta_{iht}\zeta_{jht}.$$

若要導出違約的條件動差，則有必要先對違約狀態變量 d_{iht} 做進一步的解析，根據假設一與假設四可得

$$d_{iht} \equiv \mathbf{1}(u_{iht} < \bar{d}_{it}) = \mathbf{1}\Big[\, u_{iht} < K^{-1}(q_{it}) \,\Big] = \mathbf{1}\big[\, K(u_{iht}) < q_{it} \,\big], \quad (33)$$

這裡的 u_{iht} 是互相獨立有均勻分配的隨機變量。根據上式我們可再定義一個新的連續性隨機變量

$$r_{iht} \equiv K(u_{iht}) - q_{it}, \quad (34)$$

以將違約狀態變量的定義 (33) 簡化為

$$d_{iht} = \mathbf{1}(r_{iht} < 0). \quad (35)$$

由於違約狀態變量完全取決於 r_{iht} 的正負值，所以 r_{iht} 可說是一個代表違約傾向的連續型隨機變量，我們可稱呼這個隨機變量為「驅動指標」，也可就將之視為決定違約與否的最重要因素「資產」。

為導出「資產」 r_{iht} 的動差，我們要先指出，當 K 轉換函數是標準羅吉斯分配之分配函數的反函數時，則 K (u_{iht}) 是期望值為 0 變異數為 $\pi^2/3$ 的標準羅吉斯分配。當 K 轉換函數是標準常態分配之分配函數的反函數時，則 $K(u_{iht})$ 是期望值為 0 變異數為 1 的標準常態分配。我們將以 σ^2 代表上述標準羅

吉斯分配的已知變異數 $\pi^2/3$ 或是標準常態分配的已知變異數 1 。接著我們可根據 (16) 式得到

$$q_{it} = \mathbf{b}_i'\mathbf{x}_t + \sum_{j=1}^{J_1} \mathbf{b}_{ij}'\mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{b}_{\circ i}'\mathbf{x}_\circ + \varepsilon_{it}, \quad (36)$$

這裡的 $\mathbf{b}_i'$ 、 $\mathbf{b}_{ij}'$ 、與 $\mathbf{b}_{\circ i}'$ 分別是 (16) 式中係數矩陣 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{B}_j$ 、與 $\mathbf{B}_\circ$ 的第 i 列，則給定系統風險因子當期值 $\mathbf{x}_t$ 以及過去信息 $\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-2}, \ldots$ 後的條件期望值是

$$\bar{\mu}_{it} = \mathrm{E}_{t-1}(q_{it}) = \mathbf{b}_i'\bar{\mathbf{x}}_t + \sum_{j=1}^{J_1} \mathbf{b}_{ij}'\mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{b}_{\circ i}'\mathbf{x}_\circ, \quad (37)$$

條件變異數是

$$\mathrm{Var}_{t-1}(q_{it}) = \mathbf{b}_i'\,\mathrm{Var}(\bar{\mathbf{x}}_t)\,\mathbf{b}_i + \mathrm{Var}(\varepsilon_{it}) = \mathbf{b}_i'\,\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{b}_i + \omega_{ii}, \quad (38)$$

條件共變數則是

$$\mathrm{Cov}_{t-1}(q_{it}, q_{jt}) = \mathbf{b}_i'\,\mathrm{Var}(\bar{\mathbf{x}}_t)\,\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_i'\,\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{b}_j. \quad (39)$$

給定這些結果，我們便可很容易得導出「資產」 r_{iht} 的條件動差：

- 資產的條件期望值是

$$\mathrm{E}_{t-1}(r_{iht}) = -\mathrm{E}_{t-1}(q_{it}) + \mathrm{E}\big[K(u_{iht})\big] = -\mathrm{E}_{t-1}(q_{it}) \equiv -\bar{\mu}_{it}. \quad (40)$$

- 資產的條件變異數是

$$\mathrm{Var}_{t-1}(r_{iht}) = \mathrm{Var}_{t-1}(q_{it}) + \mathrm{Var}\big[K(u_{iht})\big] = \mathbf{b}_i'\,\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{b}_i + \omega_{ii} + \sigma^2 \equiv v_i^2. \quad (41)$$

- 同類資產的條件共變數是

$$\mathrm{Cov}_{t-1}(r_{iht}, r_{igt}) = \mathrm{Var}_{t-1}(q_{it}) = \mathbf{b}_i'\,\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{b}_i + \omega_{ii}. \quad (42)$$

- 不同類資產的條件共變數則是

$$\mathrm{Cov}_{t-1}(r_{iht}, r_{jgt}) = \mathrm{Cov}_{t-1}(q_{it}, q_{jt}) = \mathbf{b}_i'\,\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{b}_j. \quad (43)$$

這些條件動差的最重要特徵是不會隨個別信用曝險 h 或 g 而改變，顯示同類別的信用曝險都具同質性，除了有相同的期望值與變異數外，與其他類別信用曝險的共變數也都同質。

若我們假設所有的「資產」 r_{iht} 是多維常態分配，則可證明違約的條件期望值 (亦即違約機率) 是

$$\mathrm{E}_{t-1}(d_{iht}) = P_{t-1}(d_{iht} = 1) = \Phi\left(\frac{\bar{\mu}_{it}}{v_i}\right). \quad (44)$$

違約的條件變異數是

$$\mathrm{Var}_{t-1}(d_{iht}) = \Phi\left(\frac{\bar{\mu}_{it}}{v_i}\right)\cdot\left[1 - \Phi\left(\frac{\bar{\mu}_{it}}{v_i}\right)\right]. \quad (45)$$

同類信用曝險的違約相關性可以如下相同的條件共變數表示：

$$\mathrm{Cov}_{t-1}(d_{iht},\, d_{igt}) = \Phi^{(2)}\left(\frac{\bar{\mu}_{it}}{v_i},\, \frac{\bar{\mu}_{it}}{v_i}\,\middle|\, \frac{\mathbf{b}_i'\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{b}_i + \omega_{ii}}{v_i^2}\right) - \Phi\left(\frac{\bar{\mu}_{it}}{v_i}\right)^2. \tag{46}$$

不同類信用曝險的違約相關性可以如下相同的條件共變數表示：

$$\mathrm{Cov}_{t-1}(d_{iht},\, d_{jgt}) \;= \Phi^{(2)}\left(\frac{\bar{\mu}_{it}}{v_i},\, \frac{\bar{\mu}_{jt}}{v_j}\,\middle|\, \frac{\mathbf{b}_i'\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{b}_j}{v_i v_j}\right) - \Phi\left(\frac{\bar{\mu}_{it}}{v_i}\right)\cdot\Phi\left(\frac{\bar{\mu}_{jt}}{v_j}\right). \tag{47}$$

這裡的 Φ 是一維標準常態分配函數，$\Phi^{(2)}(\cdot\,|\,\rho)$ 是以 ρ 為相關係數的二維標準常態分配函數。我們也可根據同樣的推導過程求取資產與違約的無條件動差，或是給定系統風險因子 $\mathbf{x}_{2t}$ 以及過去信息 $\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-2}, \ldots$ 下之資產與違約的條件動差，這些動差有助於導出並比較損失的對應動差。

(五) 模型估計

由於我們假設 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 與 $\boldsymbol{\eta}_t$ 獨立，所以可對 (16) 式的 m 個迴歸式與 (17) 式的 k 個迴歸式分別採用普通最小平方法 (OLS) 逐一進行估計。採行這些最小平方法的一個重要特點是，不需對 $\mathbf{q}_t$ 與 $\mathbf{x}_t$ (或是對應的隨機誤差項 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 與 $\boldsymbol{\eta}_t$) 做出任何分配假設，因而所得到的最小平方估計結果將很有「韌性」(robustness) ：估計結果不會因分配假設的可能錯誤而有偏誤。但我們也要指出，損失分配的模擬卻是建立在 $\mathbf{q}_t$ 與 $\mathbf{x}_t$ 的分配假設上，也就是說，為了損失分配的模擬我們之後還是必須對 $\mathbf{q}_t$ 與 $\mathbf{x}_t$ 做出前述的分配假設。

四、損失分配的模擬

我們將根據 T 季時間序列資料進行參數估計，然後進行第 T+1, T+2, T+3, T+4 季總共 4 季損失分配的模擬，T+1 至 T+4 代表未來 4 季，而我們所要模擬的是未來一年總共 4 季的損失分配。

(一) 基本資料的準備

1. 違約迴歸模型與 VAR 模型係數矩陣的估計值：

根據第 2.3.5 小節所述估計方法，估計違約迴歸模型 (16) 式以獲得係數矩陣 $\mathbf{B}$ 、$\mathbf{B}_j$ 、與 $\mathbf{B}_\circ$ 的估計值，再估計系統風險因子的 VAR 模型 (17) 式以獲得係數矩陣 $\mathbf{A}_j$ 與 $\mathrm{A}_\circ$ 的估計值。

2. 變異數共變數矩陣的 Cholesky 分解：

- 根據 (25) 式備妥 $\mathbf{x}_t$ 的條件變異數共變數矩陣 $\mathrm{Var}_{t-1}(\mathbf{x}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$ 並計算其 Cholesky 分解[註7] $\mathbf{C}_x$ 。
- 根據 (32) 式或 (20) 式備妥 $\mathbf{q}_t$ 的條件變異數共變數矩陣 $\mathrm{Var}_{t-1}(\mathbf{q}_t\,|\,\mathbf{x}_t) = \boldsymbol{\Omega}$ 並計算其 Cholesky 分解 C_0 ，由於條件變異數共變數矩陣 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 (20) 式所定義的對角矩陣，其 Cholesky 分解

C_0 也是對角矩陣，其對角元素就是 $\boldsymbol{\Omega}$ 之對角元素 ω_{ii} 的平方根。

3. 系統風險因子資料：

備妥時間序列資料 $\mathbf{x}_T, \mathbf{x}_{T-1},\cdots, \mathbf{x}_{T+1-J}$ ，以及 $\mathrm{x}_\circ$。

4. 違約損失額：

備妥第 T+1 季之所有信用曝險的違約損失額

$\zeta_{ih,T+1}$,

$h=1,2,\ldots,N_{i,T+1}$,

$i=1,2,\ldots,m$,

這裡的 $N_{i,T+1}$ 是第 i 類信用曝險的筆數，因此應備妥 m 類信用曝險總共 $N_{T+1}=\sum_{i=1}^{m} N_{i,T+1}$ 筆違約損失額。由於資料更新速度的限制，第 T+1 季之信用曝險的違約損失額通常就以第 T 季 (樣本資料所涵蓋期間的最後一季)之信用曝險的違約損失額 ζ_{ihT} 替代。

(二) 模擬步驟

1. 模擬系統風險因子 $\mathbf{x}^{(s)}_{1,T+t}$：

根據標準化一維常態分配產生 $4{\cdot}k$ 個互相獨立的模擬值 $w_1^{(s)}, w_2^{(s)}, \ldots, w_{4k}^{(s)}$ 將之分別置於 4 個 k 維向量 $\mathbf{w}^{(s)}_{T+1}, \mathbf{w}^{(s)}_{T+2}, \mathbf{w}^{(s)}_{T+3}, \mathbf{w}^{(s)}_{T+4}$ 中，然後根據給定過去信息後之 $\mathbf{x}_t$ 的條件期望值 (24) 式對之進行如下轉換：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(s)}_{T+1} &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_T+\cdots+\mathbf{A}_{J_2}\mathbf{x}_{T+1-J_2}+\mathbf{A}_\circ\mathbf{x}_\circ+\mathbf{C}_x\mathbf{w}^{(s)}_{T+1}\\
\mathbf{x}^{(s)}_{T+2} &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(s)}_{T+1}+\mathbf{A}_2\mathbf{x}_T+\cdots+\mathbf{A}_{J_2}\mathbf{x}_{T+2-J_2}+\mathbf{A}_\circ\mathbf{x}_\circ+\mathbf{C}_x\mathbf{w}^{(s)}_{T+2}\\
\mathbf{x}^{(s)}_{T+3} &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(s)}_{T+2}+\mathbf{A}_2\mathbf{x}^{(s)}_{T+1}+\mathbf{A}_3\mathbf{x}_T+\cdots+\mathbf{A}_{J_2}\mathbf{x}_{T+3-J_2}+\mathbf{A}_\circ\mathbf{x}_\circ+\mathbf{C}_x\mathbf{w}^{(s)}_{T+3}\\
\mathbf{x}^{(s)}_{T+4} &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(s)}_{T+3}+\cdots+\mathbf{A}_3\mathbf{x}^{(s)}_{T+1}+\mathbf{A}_4\mathbf{x}_T+\cdots+\mathbf{A}_{J_2}\mathbf{x}_{T+4-J_2}+\mathbf{A}_\circ\mathbf{x}_\circ+\mathbf{C}_x\mathbf{w}^{(s)}_{T+4}
\end{aligned}
\tag{48}
$$

2. 模擬類別信用曝險違約率：

根據標準化一維常態分配產生 $4{\cdot}m$ 個互相獨立的模擬值 $v_1^{(s)}, v_2^{(s)}, \ldots, v_{4m}^{(s)}$ 將之分別置於 4 個 m 維向量 $\mathbf{v}^{(s)}_{T+1}, \mathbf{v}^{(s)}_{T+2}, \mathbf{v}^{(s)}_{T+3}, \mathbf{v}^{(s)}_{T+4}$ 中，然後根據給定 $\mathbf{x}_t$ 以及過去信息後之 $\mathbf{q}_t$ 的條件期望值 (31) 式定義 $\mathbf{q}_t$ 的模擬值：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}^{(s)}_{T+1} &= \mathbf{B}\,\mathbf{x}^{(s)}_{T+1}+\mathbf{B}_1\mathbf{x}_T+\cdots+\mathbf{B}_{J_1}\mathbf{x}_{T+1-J_1}+\mathbf{B}_\circ\mathbf{x}_\circ+\mathbf{C}_0\mathbf{v}^{(s)}_{T+1}\\
\mathbf{q}^{(s)}_{T+2} &= \mathbf{B}\,\mathbf{x}^{(s)}_{T+2}+\mathbf{B}_1\mathbf{x}^{(s)}_{T+1}+\mathbf{B}_2\mathbf{x}_T+\cdots+\mathbf{B}_{J_1}\mathbf{x}_{T+2-J_1}+\mathbf{B}_\circ\mathbf{x}_\circ+\mathbf{C}_0\mathbf{v}^{(s)}_{T+2}\\
\mathbf{q}^{(s)}_{T+3} &= \mathbf{B}\,\mathbf{x}^{(s)}_{T+3}+\mathbf{B}_1\mathbf{x}^{(s)}_{T+2}+\mathbf{B}_2\mathbf{x}^{(s)}_{T+1}+\mathbf{B}_3\mathbf{x}_T+\cdots+\mathbf{B}_{J_1}\mathbf{x}_{T+3-J_1}+\mathbf{B}_\circ\mathbf{x}_\circ+\mathbf{C}_0\mathbf{v}^{(s)}_{T+3}\\
\mathbf{q}^{(s)}_{T+4} &= \mathbf{B}\,\mathbf{x}^{(s)}_{T+4}+\mathbf{B}_1\mathbf{x}^{(s)}_{T+3}+\cdots+\mathbf{B}_3\mathbf{x}^{(s)}_{T+1}+\mathbf{B}_4\mathbf{x}_T+\cdots+\mathbf{B}_{J_1}\mathbf{x}_{T+4-J_1}+\mathbf{B}_\circ\mathbf{x}_\circ\\
&\quad+\mathbf{C}_0\mathbf{v}^{(s)}_{T+4}.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

由於 C_0 也是對角矩陣，$\mathbf{C}_0\mathbf{v}^{(s)}_{T+t}$ 向量所包含的元素就分別是 $\mathbf{v}^{(s)}_{T+t}$ 之元素與 $\mathbf{\Omega}$ 對角元素之平方根的乘積，因此，$\mathbf{C}_0\mathbf{v}^{(s)}_{T+t}$ 向量所包含的是互相獨立但變異數是 $\mathbf{\Omega}$ 之對角元素的 m 個常態分配模擬值。最後將 $\mathbf{q}^{(s)}_{T+t}$ 向量中的 m 個元素 $q^{(s)}_{1,T+t}, \ldots, q^{(s)}_{m,T+t}$ 根據 (12) 式轉換成類別信用曝險的違約率：

$$p^{(s)}_{i,T+t} = K^{-1}(q^{(s)}_{i,T+t}), \qquad t = 1, 2, 3, 4, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

3. 模擬違約狀態變量及計算損失值：

①若我們所要模擬的是未來 4 季的總損失分配，且信用曝險只要在未來 4 季的任一季違約便被視為會產生損失的違約：[註8] 根據標準均勻分配產生 $4N_{T+1}$ 個互相獨立的模擬值 $u^{(s)}_{iht}$, $t = 1,2,3,4,\ h = 1,2,\cdots,N_{i,T+1}$, $i = 1,2,\cdots,m$, 然後根據之前所得到的 $p^{(s)}_{i,T+t}$ 定義違約狀態變量的模擬值：

$$d^{(s)}_{ih,T+1} \equiv \max_t \mathbf{1}(u^{(s)}_{iht} < p^{(s)}_{i,T+t}), \qquad h = 1, 2, \ldots, N_{i,T+1},\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

最後計算未來 4 季的總違約損失值：

$$L^{(s)}_{T+1} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{N_{i,T+1}} d^{(s)}_{ih,T+1} \cdot \zeta_{ih,T+1}.$$

②若我們所要模擬的是未來 4 季每一季各自的損失分配：根據標準均勻分配產生 $4N_{T+1}$ 個互相獨立的模擬值 $u^{(s)}_{iht}$, $t = 1,2,3,4$, $h = 1,2,\cdots,N_{i,T+1}$, $i = 1,2,\cdots,m$, 然後根據之前所得到的 $p^{(s)}_{i,T+t}$ 定義違約狀態變量的模擬值：

$$d^{(s)}_{ih,T+t} \equiv \mathbf{1}(u^{(s)}_{iht} < p^{(s)}_{i,T+t}), \qquad t = 1, 2, 3, 4,\ h = 1, 2, \ldots, N_{i,T+1},\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

最後計算未來 4 季之每一季的違約損失值:

$$L^{(s)}_{T+t} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{N_{i,T+1}} d^{(s)}_{ih,T+t} \cdot \zeta_{ih,T+1}. \qquad t = 1, 2, 3, 4.$$

重複上述模擬步驟 S 回，由這 S 個模擬的違約損失值所得到的直方圖就將是損失分配的模擬。

這裡要特別指出，計算未來 4 季每一季之違約損失值的過程中，均使用了相同的違約損失額 $\zeta_{ih,T+1}$ ，這是因為我們在沒有未

來各季之違約損失額資料的情況下，只好假設未來各季的違約損失額都等於資料之最後一季 (即第 T 季) 的違約損失額 ζ_{ihT} 。

(三) 給定部份系統風險因子下損失分配的模擬

進行壓力測試時，必須針對一些系統風險因子設定特定的「逆境值」 (downturn values) ，然後觀察損失分配對這些系統風險因子之逆境值的反應，並計算對應經濟資本。

給定部份系統風險因子 $\mathbf{x}_{2t}$ 下模擬損失分配所需的資料整理與之前的相關程序幾乎完全一樣：必須收集各筆信用曝險時間序列資料 (亦即信用曝險筆數及對應違約率的時間序列資料) 與系統風險因子時間序列資料，此外尚需如下的資料：

1. 備妥系統風險因子 $\mathbf{x}_{2t}$ 的給定逆境值 $\bar{\mathbf{x}}_{2,T+1}, \bar{\mathbf{x}}_{2,T+2}, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_{2,T+n}$ ，
2. 根據 VAR 模型 (17) 式估計值，計算系統風險因子之條件變異數共變數矩陣：

$$\mathrm{Var}_{t-1}(\mathbf{x}_{1t}\,|\,\mathbf{x}_{2t}) = \mathbf{\Sigma}_{11}^{*} = \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}$$

的 Cholesky 分解 C*。

一旦備妥所有資料便可進行給定部份系統風險因子下損失分配的模擬，其模擬步驟中對系統風險因子 $\mathbf{x}_{T+t}^{(s)}$ 的模擬需另外根據系統風險因子的給定值 $\bar{\mathbf{x}}_{2,T+1}, \bar{\mathbf{x}}_{2,T+2}, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_{2,T+n}$ ，定義

$$\mathbf{x}_{T+t}^{(s)} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,T+t}^{(s)} \\ \bar{\mathbf{x}}_{2,T+t} \end{bmatrix}, \qquad t = 1, 2, \ldots, n-1,$$

而其中 $\mathbf{x}_{1,T+t}^{(s)}$ 部份則以如下方式模擬：根據標準化一維常態分配產生 $n{\cdot}k_1$ 個互相獨立的模擬值 $w_1^{(s)}, w_2^{(s)}, \ldots, w_{nk_1}^{(s)}$, 將之分別置於 n 個 k_1 維向量 $\mathbf{w}_{T+1}^{(s)}, \mathbf{w}_{T+2}^{(s)}, \ldots, \mathbf{w}_{T+n}^{(s)}$ 中，然後根據 (27) 式計算

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{1,T+1}^{(s)} &= \bar{\mathbf{A}}_{12}\,\bar{\mathbf{x}}_{2,T+1} + \bar{\mathbf{A}}_{11}\,\mathbf{x}_T + \cdots + \bar{\mathbf{A}}_{1j}\,\mathbf{x}_{T+1-J} + \bar{\mathbf{A}}_{\circ 1}\,\mathbf{x}_{\circ} + \mathbf{C}^{*}\mathbf{w}_{T+1}^{(s)} \\
\mathbf{x}_{1,T+2}^{(s)} &= \bar{\mathbf{A}}_{12}\,\bar{\mathbf{x}}_{2,T+2} + \bar{\mathbf{A}}_{11}\,\mathbf{x}_{T+1}^{(s)} + \bar{\mathbf{A}}_{12}\,\mathbf{x}_T + \cdots + \bar{\mathbf{A}}_{1j}\,\mathbf{x}_{T+2-J} + \bar{\mathbf{A}}_{\circ 1}\,\mathbf{x}_{\circ} \\
&\quad + \mathbf{C}^{*}\mathbf{w}_{T+2}^{(s)} \\
\mathbf{x}_{1,T+3}^{(s)} &= \bar{\mathbf{A}}_{12}\,\bar{\mathbf{x}}_{2,T+3} + \bar{\mathbf{A}}_{11}\,\mathbf{x}_{T+2}^{(s)} + \bar{\mathbf{A}}_{12}\,\mathbf{x}_{T+1}^{(s)} + \bar{\mathbf{A}}_{13}\,\mathbf{x}_T + \cdots + \bar{\mathbf{A}}_{1j}\,\mathbf{x}_{T+3-J} \\
&\quad + \bar{\mathbf{A}}_{\circ 1}\,\mathbf{x}_{\circ} + \mathbf{C}^{*}\mathbf{w}_{T+3}^{(s)} \\
&\;\;\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (50) \\
\mathbf{x}_{1,T+n}^{(s)} &= \bar{\mathbf{A}}_{12}\,\bar{\mathbf{x}}_{2,T+n} + \bar{\mathbf{A}}_{11}\,\mathbf{x}_{T+n-1}^{(s)} + \cdots + \bar{\mathbf{A}}_{1,n-1}\,\mathbf{x}_{T+1}^{(s)} + \bar{\mathbf{A}}_{1n}\,\mathbf{x}_T + \cdots \\
&\quad + \bar{\mathbf{A}}_{1j}\,\mathbf{x}_{T+n-J} + \bar{\mathbf{A}}_{\circ 1}\,\mathbf{x}_{\circ} + \mathbf{C}^{*}\mathbf{w}_{T+n}^{(s)}.
\end{aligned}$$

這裡的

$$\bar{\mathbf{A}}_{12} = \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}, \qquad \bar{\mathbf{A}}_{1j} = \mathbf{A}_{1j} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{2j}, \qquad \bar{\mathbf{A}}_{\circ 1} = \mathbf{A}_{\circ 1} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{\circ 2},$$

一旦獲得系統風險因子 $\mathbf{x}_{T+t}^{(s)}$ 的模擬值，之後的步驟就如同第 2.4.2 小節所述。

(五) 單位風險的模擬

一旦求得模擬損失分配並由之推導出對應的經濟資本，我們必須進一步根據第 1.4.3 小節所述求取每一筆或每一類型信用曝險的個別經濟資本，在本小節中我們將簡單介紹求取個別經濟資本的「重點抽樣」(Importance Sampling) 模擬步驟。為簡化符號，之前代表各筆信用曝險的 "iht" 下標在本小節的分析中將全部簡化為 "i" 下標。

給定各筆信用曝險的違約損失額 ζ_i 與違約機率 p_i，則風險值貢獻可寫成

$$\text{VaRC}_i = \text{E}(L_i \,|\, L = \text{VaR}) = \zeta_i \cdot \frac{f_{L_{(i)}}(\text{VaR} - \zeta_i)\cdot p_i}{f_L(\text{VaR})}, \tag{51}$$

這裡的 $L_{(i)}$ 是不包括第 i 筆信用曝險的損失：

$$L_{(i)} = \sum_{j \neq i} d_j \cdot \zeta_j,$$

而 f_L 與 $f_{L(i)}$ 則分別是損失 L 與 L_i 的密度函數。同理，風險貢獻可寫成

$$\text{RC}_i = \text{E}(L_i \,|\, L \geq \xi) = \zeta_i \cdot \frac{P(L_{(i)} \geq \xi - \zeta_i)\cdot p_i}{P(L \geq \xi)}. \tag{52}$$

若違約機率 p_i 是隨機的，則風險值貢獻與風險貢獻可分別寫成

$$\text{VaRC}_i = \zeta_i \cdot \frac{\text{E}\big[f_{L_{(i)}}(\text{VaR} - \zeta_i)\cdot p_i\big]}{\text{E}\big[f_L(\text{VaR})\big]}, \tag{53}$$

與

$$\text{RC}_i = \zeta_i \cdot \frac{\text{E}\big[P(L_{(i)} \geq \xi - \zeta_i)\cdot p_i\big]}{\text{E}\big[P(L \geq \xi)\big]}, \tag{54}$$

這些結果顯示風險測度的問題事實上就是計算密度函數尾端值 $f_{L_{(i)}}(\text{VaR} - \zeta_i)$ 與 $f_L(\text{VaR})$ 以及尾端機率 $P(L_{(i)} \geq \xi - \zeta_i)$ 與 $P(L \geq \xi)$ 的問題。

給定每一筆信用曝險損失的模擬值 $L_i^{(s)} = d_i^{(s)} \cdot \zeta_i,\ i = 1, 2, \ldots, S$，與損失的模擬值 $L^{(s)} = \sum_{i=1}^{m} L_i^{(s)}$，不論我們是根據風險貢獻的定義

$$\text{RC}_i = \text{E}(L_i \,|\, L \geq \xi) = \frac{\text{E}\big[L_i \cdot \mathbf{1}(L \geq \xi)\big]}{\text{E}\big[\mathbf{1}(L \geq \xi)\big]},$$

直接求導各筆信用曝險風險貢獻的模擬值：

$$\text{RC}_i = \frac{\dfrac{1}{S}\displaystyle\sum_{s=1}^{S} L_i^{(s)} \cdot \mathbf{1}(L^{(s)} \geq \xi)}{\dfrac{1}{S}\displaystyle\sum_{s=1}^{S} \mathbf{1}(L^{(s)} \geq \xi)}.$$

還是根據 (52) 或是 (54) 式求導如下的模擬值：

$$\mathrm{RC}_i = \frac{\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\mathbf{1}(L_{(i)}^{(s)} \geq \xi - \zeta_i)\cdot p_i^{(s)}\cdot\zeta_i}{\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\mathbf{1}(L^{(s)} \geq \xi)},$$

均非常缺乏效率，這是因為給定的損失門檻值 ξ 值通常都很大 (例如 ξ 是損失分配的第 99 百分位) ，導致 S 個損失模擬值 $L_i^{(s)}$ 中大於 ξ 的個數太少而無法達到大數法則的收斂，採用類似步驟模擬風險值貢獻 VaRC_i 的問題更為嚴重。

為解決尾端機率不易計算的問題，我們可採用「重點抽樣」的模擬技巧，相關的討論可見 Merino and Nyfeler (2004) ，其基本概念是將模擬的重點由損失分配的期望值移轉到損失分配的尾端。更具體來說，我們將以所謂的「偏移密度函數」 (tilted density) $f_{(t)}(L)$ 替代損失分配原來的密度函數 $f_L(L)$ 以計算尾端機率：

$$P(L \geq \xi) = \int_0^\infty \mathbf{1}(L \geq \xi) f(L)\, dL = \int_0^\infty \left[\mathbf{1}(L \geq \xi)\frac{f(L)}{f_{(t)}(L)}\right] f_{(t)}(L)\, dL, \qquad (55)$$

其中在違約機率 p_i 給定的假設下，損失分配原來的密度函數是

$$f_L(L) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{d_i}(1-p_i)^{1-d_i},$$

而偏移密度函數則是將各筆信用曝險的違約機率由 p_i 增加為 $p_i(t)$ 後的損失密度函數：

$$f_{(t)}(L) = \prod_{i=1}^{m} p_i(t)^{d_i}\left[1-p_i(t)\right]^{1-d_i}, \quad (56)$$

這裡的違約機率 $p_i(t)$ 是 t 的遞增函數：

$$p_i(t) \equiv \frac{p_i\cdot e^{t\cdot\zeta_i}}{1-p_i+p_i\cdot e^{t\cdot\zeta_i}}, \qquad 0 \leq t < \infty \qquad (57)$$

其中的 t 將被稱為「違約機率加碼係數」，是一個可顯示違約機率增加程度的指標。

我們可將 (55) 式改寫為

$$P(L \geq \xi) \equiv \mathrm{E}_{(t)}\left[\mathbf{1}(L \geq \xi)\frac{f(L)}{f_{(t)}(L)}\right], \quad (58)$$

其中期望值 $\mathrm{E}_{(t)}$ 是建立在新損失 $L_{(t)}$ 以及對應偏移密度函數上的積分，所謂的重點抽樣便是根據尾端機率的這個新定義所進行的模擬。模擬執行方式是先求取一個最適的 t 值，[註9]然後執行如下步驟

1. 根據違約機率 $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_m(t)$ 產生對應違約狀態變量的模擬值 $d_i^{(s)}(t),\ d_2^{(s)}(t),\ \ldots,\ d_m^{(s)}(t)$ ，其中
$$d_i^{(s)}(t) \equiv \mathbf{1}\left[u_i^{(s)} < p_i(t)\right], \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$
這裡的 $u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, \ldots, u_m^{(s)}$ 是根據標準均勻分配所產生之互相獨立的模擬值，然後計算對應的損失
$$L^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^{m} d_i^{(s)}(t)\cdot\zeta_i.$$
2. 求取尾端機率 $P(L \geq \xi)$ 的模擬值：[註10]

$$P(L \geq \xi) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} \mathbf{1}\big[L^{(s)}(t) \geq \xi\big] \cdot \prod_{i=1}^{m} \frac{1 - p_i + p_i \cdot e^{t\cdot\zeta_i}}{e^{t\cdot d_i^{(s)}(t)\cdot\zeta_i}}.$$

只要違約機率加碼係數 t 不為負值，上述重點抽樣模擬步驟皆可收斂到尾端機率 $P(L \geq \xi)$，且當違約機率加碼係數 t=0 時，上述模擬步驟便回歸到典型的模擬步驟 (亦可收斂到尾端機率)。我們也可以完全相同的重點抽樣模擬步驟再導出尾端機率 $P(L_{(i)} \geq \xi)$，這裡的 $L_{(i)}$ 是不包括第 i 筆信用曝險之所有其他信用曝險的損失。

一旦瞭解在各筆信用曝險違約機率給定的條件下，如何利用重點抽樣模擬各筆信用曝險的風險貢獻，我們也可擴大模擬步驟，計算在各筆信用曝險違約機率彼此相關的設定下每一筆信用曝險的風險貢獻，每一回合的模擬步驟包括：

1. 模擬產生條件違約機率 $p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, \ldots, p_m^{(s)}$
2. 假設 $L^{(s)}$ 是對應於違約機率 $p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, \ldots, p_m^{(s)}$ 之所有信用曝險的違約損失值，而 $L_{(i)}^{(s)}$ 是對應於違約機率 $p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, \ldots, p_{i-1}^{(s)}, p_{i+1}^{(s)}, \ldots, p_m^{(s)}$ 之排除第 i 筆信用曝險後所有其他 m-1 筆信用曝險的違約損失值，則可根據之前所述的重點抽樣模擬方法求得尾端機率的模擬值：

$$P(L^{(s)} \geq \xi),$$

與

$$P(L_{(1)}^{(s)} \geq \xi - \zeta_{(1)}),\ P(L_{(2)}^{(s)} \geq \xi - \zeta_{(2)}),\ \ldots,\ P(L_{(m)}^{(s)} \geq \xi - \zeta_{(m)}).$$

重複這些模擬步驟 S 回，所得到 S 組條件違約機率模擬值 $p_i^{(s)}$ 以及密度函數與尾端機率的模擬值，便可用來計算所有信用曝險的風險貢獻模擬值：

$$\mathrm{RC}_i = \zeta_i \cdot \frac{\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} P(L_{(i)}^{(s)} \geq \xi - \zeta_i) \cdot p_i^{(s)}}{\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} P(L^{(s)} \geq \xi)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

參、實證與模擬結果

我們所使用的資料，包括 13 家公股銀行、 26 家民營銀行、與 2 家外資銀行對表一所示 9 類放款的放款筆數與違約筆數，資料期間大致是 1996 年第一季到 2009 年第一季，但各銀行各類放款的期間大都長短不一，此外，我們尚有數十個總體經濟與金融變量的時間序列資料。我們最後整理出較完整的 37 家銀行資料 (包括 10 家公股銀行、25 家民營銀行、與 2 家外資銀行) 。在表一中我們也列舉了各類放款的給定 LGD (違約損失率) 值，我們將假設每一類放款中的所有曝險均有相同的 LGD 值 (以曝險值為權數的加權平均 LGD 是 0.39) 。

表一　放款類別與對應 LGD

放款類別		LGD
1	個人購置不動產放款	0.25
2	信用卡	0.85
3	個人其他有擔放款（扣除購屋貸款）	0.45
4	個人無擔保放款	0.85
5	民營營造業放款	0.45
6	民營電子業放款	0.45
7	其他製造業（扣除民營電子業）	0.45
8	民營批發及零售業	0.45
9	民營服務業（不含金融中介業、保險及證券）	0.45

在表二中我們列舉三種銀行對各種放款類別的曝險額以及占總曝險 (約 14 兆) 比率，表二最顯眼的結果是不動產曝險額是 (尤其是公股銀行) 所有放款類別中最大者，其金額與比率均遠高於其他放款類別。企金中則以對製造業的放款為最大，公股銀行仍然占其最大比率。此外，民營銀行的家數雖是公股銀行的 2.5 倍，但各種企金曝險額都遠低於公股銀行，在消金方面 (尤其是信用卡) 則較有斬獲。

表三顯示三種銀行對各類放款之總放款件數的季平均，可作為表二的補充。

表四列舉三種銀行對各類放款之季平均違約率，消金違約率大致是企金違約率 4 到 10 倍，其中消金之個人無擔放款的違約率最高，企金之服務業與電子業的違約率最低。此外，除了不動產、個人無擔、與批發零售業外，民營銀行的類別違約率均遠高於公股銀行。

在我們的實證模型設定中，我們視每一家銀行的每一類放款為一同質的信用曝險類別，[註11]因此之前所述模型中的「信用曝險

表二　2009 年第一季曝險額 (億元) 與比率

放款類別	公股		民營		外資		總額	
不動產	29245	20.9%	24574	17.6%	1869	1.3%	55688	39.8%
信用卡	134	0.1%	1591	1.1%	81	0.1%	1806	1.3%
個人有擔	4915	3.5%	6399	4.6%	337	0.2%	11650	8.3%
個人無擔	2749	2.0%	3053	2.2%	435	0.3%	6237	4.5%
營造業	5971	4.3%	4096	2.9%	68	0.0%	10135	7.2%
電子業	7739	5.5%	5617	4.0%	100	0.1%	13456	9.6%
製造業	15036	10.8%	6022	4.3%	441	0.3%	21499	15.4%
批發零售業	5456	3.9%	2751	2.0%	166	0.1%	8372	6.0%
服務業	6664	4.8%	4165	3.0%	138	0.1%	10967	7.8%
總額	77909	55.7%	58267	41.7%	36347	2.6%	139810	100.0%

表三　季平均放款件數 (百)

	公股	民營	外資
不動產	10688	7630	706
信用卡	26663	147237	7015
個人有擔	2457	4424	174
個人無擔	17574	30263	1182
營造業	330	199	17
電子業	246	175	18
製造業	1599	677	66
批發零售業	1248	862	79
服務業	194	239	13

表四　季平均違約率

放款類別	公股	民營	外資	全體
不動產	2.60%	2.67%	3.91%	2.72%
信用卡	1.73%	2.73%	2.08%	2.41%
個人有擔	1.11%	2.50%	1.64%	2.06%
個人無擔	6.50%	4.87%	7.21%	5.50%
營造業	0.34%	0.62%	0.84%	0.55%
電子業	0.23%	0.39%	0.36%	0.34%
製造業	0.17%	0.49%	0.50%	0.40%
批發零售業	0.56%	0.52%	0.67%	0.54%
服務業	0.15%	0.39%	0.54%	0.33%

類別」數 m 就大約等於 320 餘。[註12]也就是說，我們假設每一家銀行的每一類放款受到同樣一組總體經濟系統風險因子的影響，並有相同的迴歸係數，但對於該銀行的不同類放款乃至於不同銀行的放款，則假設會受到不同總體經濟系統風險因子組合的影響，因而有不同的迴歸係數。在這個假設下，我們逐一對每一家銀行的每一類放款搜尋最適的總體經濟系統風險因子 (基本上是選取能使 R^2 最大的系統風險因子組合) ，然後對所選定的總體經濟系統風險因子採用最小平方法估計違約迴歸模型 (16) 式，總共求得 320 餘條迴歸模型的係數估計。

我們採用由全體曝險到類別曝險的階段搜尋方式決定各迴歸模型中總體經濟系統風險因子的組合：在第一個階段中，我們以所有銀行九類放款在 2009 年第一季之曝險額占總曝險的比例為權數，求導所有銀行的九類放款違約率在各時點的加權平均 $\bar{p}_t$ ，再以此加權平均違約率的 logit 轉換為應變數，找出能使調整後之 R^2 為最大的解釋變量組合，我們的候選解釋變量包括上百個總體經濟與信用變量及其落後項，在表五中我們列出了最適的總體經濟系統風險因子組合及其對應的迴歸係數估計值，迴歸係數估計值的正負號符合直覺。我們將以 x_t 代表表五所列總體經濟系統風險因子以對應迴歸係數估計值為權數的加權和，並稱之為「總體指標」。

表五　第一階段之最適總體經濟系統風險因子組合

解釋變量	估計值	統計量
(實質經濟成長率)$_t$	-0.0169	-2.53
(失業率)$_t$-2	0.3177	8.37
(一年期存款實質利率)$_t$-2	0.0479	2.03
(放款筆數加權平均對數值)$_t$-1	-0.2862	-2.12
(個人放款年增率)$_t$-2	-0.0227	-4.31
(應還本息占可支配所得)$_t$-1	3.1362	2.84
△(國泰房價指數)$_t$-2	-0.0528	-2.34
常數項	-3.5298	-2.16
調整後R2	0.851	
s2	0.140	

△代表差分值。

在第二個階段中，我們以所有銀行不動產放款在 2009 年第一季之曝險額占總曝險的比例為權數，求導所有銀行的不動產放款違約率在各時點的加權平均 $\bar{p}^*_{1t}$ ，再以此加權平均違約率的 logit 轉換為應變數，找出能使調整後之 R^2 為最大的解釋變量組合，其中前一階段所求得之總體指標 x_t 是一定納入的基本解釋變量。這裡我們就不再列舉

所找到的最適總體經濟系統風險因子與對應的迴歸係數估計值，而只在表六揭露最適總體經濟系統風險因子組合，由表六第三列可知所選的總體經濟變量是應還本息占可支配所得以及房貸年增率的二期落後項 (表六中的數字代表對應總體經濟或信用變量的落後期數) 。我們將以 $\bar{x}^{*}_{1t}$ 代表這裡所求得之總體經濟系統風險因子以對應迴歸係數估計值為權數的加權和，並稱之為「不動產產業指標」。針對每一個產業的資料重複這個搜尋步驟便可逐次導出九個產業的「產業指標」 $\bar{x}^{*}_{jt},\ \ j=1,2,\ldots,9$ 。由表六亦可得知我們從數十個候選總體經濟變量中經過不斷測試後所篩選出之最重要的 22 個變量。

在第三個階段中，我們以個別銀行之所有放款在 2009 年第一季之曝險額占總曝險的比例為權數，求導各銀行放款違約率在各時點的加權平均 $\bar{p}^{**}_{it}$ ，然後重複第二階段的做法，便可逐次導出所有銀行的「銀行指標」 $\bar{x}^{**}_{it},\ \ j=1,2,\ldots,37$ 。如同之前的產業指標，表六顯示各銀行指標所包含的總體經濟與信用變量。

在最後的階段中，我們以各銀行的各類放款之違約率 p_{ijt} 的 ligit 轉換為應變數，以總體指標 $\bar{x}_t$ 、產業指標 $\bar{x}^{*}_{jt}$ 、與銀行指標 $\bar{x}^{**}_{it}$ 為三個解釋變量，分別進行迴歸模型的估計：

$$\ln\left(\frac{p_{ijt}}{1-p_{ijt}}\right)\equiv q_{ijt}=\alpha_{ij}+b_{1ij}\cdot\bar{x}_t+b_{2ij}\cdot\bar{x}^{*}_{jt}+b_{3ij}\cdot\bar{x}^{**}_{it}+\varepsilon_{ijt}, \tag{59}$$

$j=1,2,\ldots,9,\ \ i=1,2,\ldots,25$ 。

表七列舉 310 餘條迴歸模型 (59) 式中總體指標 $\bar{x}_t$ 之迴歸係數 b_{1ij} 的估計值，為節省篇幅 b_{2ij} 與 b_{3ij} 的估計值就不再列出。表七中最顯眼的結果是迴歸係數估計值符號正負相間，顯示違約相關導致集中度風險的同時，也存在著不低的風險分散空間。

表八列舉 310 餘條迴歸模型 (59) 式之調整後 R^2 的分組平均，最重要的結論是由總體經濟與信用變量所建構的三個指標所得到的配適度大致是達到一個可接受的水準 (平均約 0.5)，由於對應迴歸係數代表違約相關性，[註13]是求導經濟資本最關鍵參數，迴歸模型的良好配適度讓我們對之後所將求得的經濟資本較具信心。

由表八我們也得知，消金迴歸模型的 R^2 大體要比企金為高，尤其是不動產迴歸模型的配適度是所有放款類別中最佳者。我們也發現，R^2 傾向於和表四所列舉的違約率成正比，尤其是企金五個產業之違約率與 R^2 之間的關係相當一致 (只有服務業稍有所偏離)。

表六所列舉的 22 個總體經濟變量將如表九第一欄所示的分為 4 組，根據這個分

表六　總體指標、產業指標、與銀行指標所包含的總體經濟與信用變量

放款類別	實質經濟成長率	△景氣領先指標	景氣對策綜合判斷分數	個人放款年增率	企業放款年增率	放款筆數加權平均對數值	消費者物價年增率	失業率	△工業生產指數	一年期存款實質利率	△匯率季底值	匯率日報酬標準差	△國泰房價指數	應還本息占可支配所得	家庭借款占放款總額	家庭借款占GDP	房貸年增率	其他消費放款年增率	信卡餘額年增率	△上櫃股價指數	△上市上櫃融資餘額
全體	0			2		1		2		2			2	1							
不動產														0			2				
信用卡				1										0							
個人有擔			0												0						
個人無擔				0																	
營造業					0										2						
電子業											0	0					1			1	1
製造業								0							0						
批發零售業								0							0						
服務業					2		2							2							
公股4					0			1											0		
公股5					0			2						0							
公股6					0			2						0							
公股7														1			0				
公股8					0												0				
公股9								2											0		
公股10													0				0				
公股11													1	1							
公股12		0		0								0									
公股14					0									0							
民營1				0						0				0							
民營2					0										0						
民營3							0			0											

表中數字代表對應總體經濟或信用變量的落後期數

放款類別	實質經濟成長率	△景氣領先指標	景氣對策綜合判斷分數	個人放款年增率	企業放款年增率	放款筆數加權平均對數值	消費者物價年增率	失業率	△工業生產指數	一年期存款實質利率	△匯率季底值	匯率日報酬標準差	△國泰房價指數	應還本息占可支配所得	家庭借款占放款總額	家庭借款占GDP	房貸年增率	其他消費放款年增率	信卡餘額年增率	△上櫃股價指數	△上市上櫃融資餘額
民營4										2											
民營5							1												2		
民營7					0									0							
民營8					0									0							
民營11			0		0						0								0		
民營12					0						0								0		
民營13												0									
民營14				0	0														0		
民營15																0		0			
民營16				0																	
民營22									0					0			0				
民營24										0						0					
民營25					0									0					0		
民營26				0															0		
民營27												0		0			0				
民營28														0			0				
民營30														0				0			
民營32							0		1					0							
民營33										0				0							
民營34				0										0							
民營35										0							0				
民營36	0														1						
外資1		0								0											
外資2										0				0							

表中數字代表對應總體經濟或信用變量的落後期數

表七： 總體指標 x_t 之迴歸係數 b_{1ij} 的估計值

銀行	不動產	信用卡	個人有擔	個人無擔	營造業	電子業	製造業	批零業	服務業
公股4	1.334	-3.204	6.899	-0.146	2.208	-0.697	1.243	5.002	4.720
公股5	0.583	1.717	2.891	3.573	-0.530	-0.479	-0.732	1.268	1.057
公股6	-0.147	0.788	4.763	0.009	4.710	-0.039	4.353	2.993	1.161
公股7	0.724	1.348	6.896	1.192	-7.175	-0.559	4.693	2.730	3.132
公股8	0.129	0.523	7.885	1.671	0.423	-0.497	4.926	1.844	0.955
公股9	1.069	1.401	2.782	3.735	0.731	2.165	13.601	2.745	2.258
公股10						1.177	-1.239	4.320	2.435
公股11	5.641	8.275	-171.888	76.162	-16.061	8.500	-7.842	124.367	41.842
公股12	-0.270	0.542	1.957	-0.310	0.521	0.956	4.991	1.019	1.629
公股14	0.188	0.873	3.097	0.887	0.918	0.215	0.458	1.075	1.137
民營1	0.038	-1.981	1.174	0.459	1.602	0.087	1.435	0.597	0.226
民營2	0.719	1.226	4.747	0.042	0.622	2.480	-7.801	3.301	1.721
民營3	2.071	0.469	-2.140	2.287	-0.129	1.093	-1.264	-0.282	-0.489
民營4				-0.781	-1.683	-0.364	-0.337	0.733	-0.611
民營5	4.377				0.909	1.553	-1.988	2.778	1.881
民營7	-10.657	23.034	20.297	24.157	15.865	3.225	24.129	8.708	10.376
民營8	-2.799	-0.900	-2.710	1.142	1.809	8.845	17.248	17.134	5.753
民營11	-0.676		0.940	-0.044	-2.583	0.235	-0.216	1.145	0.958
民營12	-0.111	0.688	1.354	-3.433	-0.661	1.365	-1.949	-0.261	0.593
民營13	-1.121	0.096	1.760	-0.489	0.577	1.600	-0.445	0.970	0.526
民營14	0.617	0.108	3.495	1.463	3.076	0.646	-0.015	2.613	1.702
民營15	-0.809		24.046	0.335	1.134	0.026	1.958	2.574	0.659
民營16	0.682	-0.610	-5.724	1.098	2.176	1.236	0.641	2.861	2.982
民營22	-1.258	2.815	3.203	-0.892	0.009	1.055	5.155	3.261	0.157
民營24	-0.686	0.235	8.367	-0.653	-11.393	3.397	-1.539	-0.488	1.915
民營25	-0.604	1.194	3.305	2.108	3.130	2.845	7.786	3.850	1.898
民營26	0.469		1.103	-0.786	2.250	1.651	-6.895	2.590	2.720
民營27	-0.954	1.115	7.227	-2.032	2.126	2.024	8.833	3.682	2.448
民營28	-0.776	0.204	1.448	-0.503	2.212	0.310	5.136	-0.574	-0.799
民營30	-0.933	0.487	5.438	-0.115	1.418	0.218	-3.683	2.958	1.065
民營32	-1.227	0.303	10.574	0.205	0.334	2.182	7.464	3.324	2.365
民營33	-0.691	2.167	18.680	0.583	2.609	2.629	2.765	2.632	3.210
民營34	-0.173	-0.729	4.555	-0.102	2.847	2.397	-4.731	-0.543	4.080
民營35	4.157	3.478	6.995	1.376	-2.538	-0.056	-1.543	5.096	6.709
民營36	1.182	1.141	-0.359	-1.040	1.593	-0.475	-3.693	2.008	1.333
外資1	0.558	0.416	2.017	3.592	-1.547	1.171	10.690	2.839	-0.135
外資2	-0.024	0.616	1.839	2.124	2.146	0.269	0.395	0.929	0.654

表八　R^2 平均值

放款類別	公股	民營	外資	全體
不動產	0.786	0.748	0.773	0.759
信用卡	0.604	0.700	0.634	0.668
個人有擔	0.565	0.527	0.368	0.528
個人無擔	0.635	0.547	0.498	0.567
營造業	0.535	0.483	0.194	0.480
電子業	0.122	0.307	0.000	0.241
製造業	0.343	0.399	0.373	0.383
批發零售業	0.430	0.434	0.327	0.427
服務業	0.491	0.457	0.056	0.445
全體	0.500	0.505	0.358	0.496

表九　曾被納入各條違約迴歸模型的總體經濟變量

VAR模型	變量名稱	R^2	壓力變量
VAR(1)	1. 實質經濟成長率	0.7379	✓
	2. △景氣領先指標綜合指數	0.6442	✓
	3. 景氣對策綜合判斷分數	0.8103	✓
	4. 個人放款年增率	0.9606	
	5. 企業放款年增率	0.9104	
	6. 放款筆數加權平均對數值	0.9936	
VAR(1)	1. 消費者物價指數年增率	0.5605	
	2. △製造業存貨量指標	0.2221	✓
	3. 失業率	0.9058	✓
	4. △工業生產指數	0.4378	
	5. 一年期存款實質利率	0.8101	
	6. △匯率季底值	0.1145	
	7. 匯率日報酬標準差	0.3156	✓
VAR(1)	1. △國泰房價指數	0.6036	
	2. 當期應還本付息總額/當期可支配所得總額比率	0.5373	
	3. 家庭借款/存款機構放款總額	0.9617	
	4. 家庭借款餘額對GDP比率	0.8097	
	5. 購置住宅及房屋修繕放款年增率	0.9643	
	6. 其他消費性放款年增率	0.9727	
	7. 信用卡餘額年增率	0.9805	
VAR(1)	1. △上櫃股價指數	0.0620	
	2. △上市上櫃融資餘額	0.0100	

組，我們分別估計 4 個彼此獨立的 VAR 模型 (17) 式，表九第一欄顯示各對應 VAR 模型的階數皆為 1 ，第三欄顯示每一個總體經濟變量在對應 VAR 模型中之對應方程中的各落後項解釋變量對各該迴歸式之估計的 R^2 ，絕大多數總體經濟變量 VAR 模型的模型配適度都相當高，顯示 VAR 模型能相當有效的解釋 (乃至於預測) 各個總體經濟變量的歷史走勢。

由於估計結果過多，我們就省略了大多數違約迴歸模型與 VAR 模型係數估計值的表列。因為每一條違約迴歸模型包含各自不同的總體經濟系統風險因子組合，所以不論是由數十個候選總體經濟變量中搜尋每一條違約迴歸模型的最適系統風險因子組合，還是對違約迴歸模型的估計、檢定與測試，都是非常費時費力的工程，在厘清理論模型並完成模擬電腦程式的建置後，這個建模估計步驟事實上是推導經濟資本過程中最需要總體經濟及風險管理專業意見人為判斷之處，是最費時的步驟，但同時也是影響經濟資本品質最甚的關鍵。

一、經濟資本的模擬計算結果

我們採用第 2.4.2 小節所述之模擬步驟對所有 37 家銀行 9 類放款進行 10 萬次的模擬，便可求得涵蓋全台灣 2010 年所有銀行之主要信用曝險的模擬損失分配，並由之求得預期損失 (EL) 以及 99% 的風險值 (VaR) ，再計算對應的經濟資本 (EC = VaR - EL) ，我們將此 EL 、 VaR 、與 EC 分別除以所有銀行所有放款的暴險值 13,981,041,198,000 (接近 14 兆) 元，並將所得到的比例值結果列於表十中。我們再採用第 2.4.3 小節所述之模擬步驟求取壓力情境下模擬損失分配，對應的 EL 、 VaR 、與 EC 的比例值結果也列於表十中。

壓力情境是建立在表十第三欄所勾選之 6 個總體變量的逆境值上，至於逆境值的決定則是在我們對總體變量進行模擬所得到的 10 萬個模擬值中最極端之 1000 個的平均值，(亦即各總體變量之邊際分配中信賴水準為 0.1% 或 99.9% 的預期短缺值) 。表十的結果顯示預期損失率在壓力情境下提升了 0.6% ，但經濟資本率則只增加輕微的 0.08% ，臺灣銀行整體來說對系統風險的極端衝擊有相當的承擔能力。

我們接著根據第 2.5 小節所述之模擬步驟求取 2010 年以及在壓力情境下每一家銀行的每一類放款所分配到的經濟資本，若將 2010 年個別的經濟資本除以個別曝險額，便得到對應的「經濟資本率」。若將 2010 年個別的經濟資本除以 2010 年的全體經濟資本，則得到所謂的「經濟資本份額」。我們還可將壓力情境下所得到的個別經濟資本除以 2010 年的對應值得到所謂的「壓力倍數」，表十一所列舉的是針對 9 類放款的結果，而表十二則列舉 37 家銀行的計算結

果。

由表十一之經濟資本率與經濟資本份額的結果可知，消金的風險傾向於較企金為大，其中以消金的房貸 (個人購置不動產放款) 為最著，主要原因是房貸的曝險額在所有信用曝險中的比例非常高，有相當的集中度風險。個人無擔放款的風險程度也不小，而企金中以對製造業放款的風險為最大。至於壓力測試的結果部份，我們發現消金的壓力倍數傾向於較低，較不畏懼壓力情境的衝擊。相反的，企金中對製造業與批發及零售業的放款會對壓力情境的衝擊有很劇烈的反應。

由表十二之經濟資本率與經濟資本份額的結果可知，2010 年公股銀行的風險平均來說要比民營銀行為大，再根據壓力倍數的結果可知，公股銀行的風險波動也比較大。

表十　全台所有銀行 (信賴水準 99.9%)

	經濟資本率	風險值率	預期損失率
2010 年	0.0396	0.0735	0.0339
壓力情境	0.0404	0.0802	0.0398

表十一　各類放款經濟資本 (信賴水準 99.9%)

放款類別	經濟資本率	排序	經濟資本份額	排序	壓力倍數	排序
不動產	0.2709	1	0.6799	1	0.9913	7
信用卡	0.0382	5	0.0106	9	1.1273	4
有擔放款	0.0476	4	0.0450	4	0.8544	9
無擔放款	0.1211	2	0.1157	2	0.9310	8
營造業	0.0138	8	0.0113	8	1.1430	3
電子業	0.0122	9	0.0133	7	1.0831	6
製造業	0.0515	3	0.0898	3	1.3154	1
批發零售業	0.0245	6	0.0167	6	1.2936	2
服務業	0.0198	7	0.0176	5	1.1244	5

經濟資本率：各類放款經濟資本占對應放款總曝險
經濟資本份額：各類放款經濟資本占總經濟資本
壓力倍數：壓力情境下經濟資本占正常情境下經濟資本

表十二 個別銀行經濟資本 (信賴水準 99%)

銀行	經濟資本率	排序	經濟資本份額	排序	壓力倍數	排序
公股4	0.1603	3	0.1403	3	0.9915	24
公股5	0.3000	1	0.2291	1	0.9601	30
公股6	0.2079	2	0.1903	2	0.9753	26
公股7	0.0797	6	0.0439	5	1.0399	14
公股8	0.0589	12	0.0372	6	1.0254	18
公股9	0.1047	4	0.0565	4	1.3504	1
公股10	0.0444	23	0.0007	32	0.7447	37
公股11	0.0081	36	0.0005	33	0.9004	33
公股12	0.0456	22	0.0303	8	1.2027	2
公股14	0.0569	15	0.0257	12	1.0028	21
公股平均	0.1067		0.0755		1.0193	
民營1	0.0316	28	0.0050	23	1.0259	16
民營2	0.0746	9	0.0341	7	0.8083	36
民營3	0.0589	13	0.0269	9	1.0706	11
民營4	0.0040	37	0.0002	36	1.0788	9
民營5	0.0120	34	0.0005	34	0.9931	23
民營7	0.0748	8	0.0108	17	0.9948	22
民營8	0.0190	32	0.0013	30	0.9685	27
民營11	0.0085	35	0.0002	37	0.8614	35
民營12	0.0154	33	0.0008	31	0.9674	28
民營13	0.0300	30	0.0061	20	0.9575	31
民營14	0.0305	29	0.0032	27	0.9607	29
民營15	0.0382	27	0.0029	28	1.0999	6
民營16	0.0554	17	0.0033	26	0.8689	34
民營22	0.0460	21	0.0055	21	1.0141	20
民營24	0.0402	25	0.0051	22	1.1568	3
民營25	0.0765	7	0.0120	15	1.1326	4
民營26	0.0888	5	0.0260	11	1.0512	12
民營27	0.0617	10	0.0204	13	1.1227	5
民營28	0.0434	24	0.0037	25	1.0150	19
民營30	0.0591	11	0.0198	14	1.0900	8
民營32	0.0587	14	0.0084	18	1.0259	17
民營33	0.0491	19	0.0037	24	1.0403	13
民營34	0.0516	18	0.0062	19	1.0713	10
民營35	0.0568	16	0.0266	10	1.0306	15
民營36	0.0246	31	0.0005	35	0.9859	25
民營平均	0.0444		0.0093		1.0157	
外資1	0.0393	26	0.0014	29	0.9556	32
外資2	0.0472	20	0.0108	16	1.0940	7
外資平均	0.0433		0.0061		1.0248	

附 註

(註1) 之後我們將對風險高低有非常明確的定義，但在這裡我們只假設銀行可以主觀定出一個區隔風險高低的絕對門檻。

(註2) 這個轉換的反函數是標準羅吉斯分配的分配函數$\exp(\bar{d}_{it})/[1+\exp(\bar{d}_{it})]$。

(註3) 這裡的機率 $P_{t\text{-}1}$ 期望值 $\mathrm{E}_{t\text{-}1}$ 均是給定系統風險因子的過去信息 $\{\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-2}, \ldots,\}$ 下的條件公式，亦即 $P_{t-1}(\cdot) \equiv P(\cdot \,|\, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-2}, \ldots)$ 與 $\mathrm{E}_{t-1}(\cdot) \equiv \mathrm{E}(\cdot \,|\, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-2}, \ldots)$。

(註4) 參見 Wong, Choi, and Fong (2006)。這裡我們要指出，我們可針對系統風險因子 $\mathbf{x}_t$ 設立更為一般化的「結構式 VAR(J_2) 模型」如下：

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}_t = \sum_{j=1}^{J_2} \mathbf{A}_j\,\mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{A}_\circ\,\mathbf{x}_\circ + \boldsymbol{\eta}_t,$$

其中 $\mathbf{A}$ 矩陣代表 $\mathbf{x}_t$ 中之各系統風險因子之間的同期相關性，與 $\mathbf{A}_j$ 所矩陣代表各系統風險因子之間的跨期相關性很不相同，$\mathbf{A}$ 矩陣的設定是結構式 VAR 模型與非結構式 VAR 模型 (17) 式之間最大的不同。結構式 VAR 模型之 $\mathbf{A}$ 矩陣的設定雖容許我們導入更多系統風險因子的互動關係，但卻完全不會對損失分配產生任何的影響。

(註5) 這裡的期望值與變異數共變數矩陣均是給定系統風險因子的過去信息 $\{\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-2}, \ldots,\}$ 下的條件動差，條件期望值將以 $\mathrm{E}_{t\text{-}1}$ 的符號表示，條件變異數將以 $\mathrm{Var}_{t\text{-}1}$ 的符號表示。亦即 $\mathrm{E}(\cdot \,|\, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-2}, \ldots) \equiv \mathrm{E}_{t-1}(\cdot)$ 與 $\mathrm{Var}(\cdot \,|\, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t-2}, \ldots) \equiv \mathrm{Var}_{t-1}(\cdot)$ 。

(註6) 在一些有關 (17) 式之穩定性假設下，系統風險因子 $\mathbf{x}_t$ 可以寫成隨機衝擊項 $\boldsymbol{\eta}_t, \boldsymbol{\eta}_{t-1}, \ldots$ 的線性組合：

$$\mathbf{x}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_j \boldsymbol{\eta}_{t-j},$$

其中的係數矩陣 $\boldsymbol{\Psi}_j$ 便是所謂的「衝擊反應係數」。由於 $\boldsymbol{\eta}_t$ 與所有各期的 $\boldsymbol{\eta}_t$ 彼此獨立，所以也就與 $\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \ldots$ 彼此獨立。

(註7) $\mathbf{C}_x$ 是一個下三角矩陣，且 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{C}_x'$ 。

(註8) 信用曝險只要在未來 4 季的任一季違約便視為違約，信用曝險在未來 1 年的年違約機率等於 1 減未來 4 季皆不違約的機率。

(註9) 最適 t 值的定義與求導方式可參見 Merino and Nyfeler (2004) 的說明。

(註10) 損失之重點抽樣模擬值 $L^{(s)}(t)$ 的直方圖在模擬次數不大時，通常都會成為階梯函數的形式，再加上 $L^{(s)}(t) \geq \xi$ 的條件後更是如此，因而導致尾端機率 $P(L \geq \xi)$ 的模擬值有很大的變異，這裡的調整項 $M(t) \cdot e^{-t \cdot L^{(s)}(t)}$ 有平滑化 $L^{(s)}(t)$ 之直方圖的功能。

(註11) 本文的一個重要缺陷是，由於資料的限制，我們無法就各類放款的信用評等進行更進一步的分類，也就是我們不得不假設每一種放款內的所有曝險均有大致相同的長期 PD ，就像是它們有大致相同的 LGD 。

(註12) 因為 37 家銀行共 9 類放款，所以 $9 \times 37 = 333$ ，但並非每一家銀行都經營所有 9 類放款。

(註13) 迴歸係數就是資產共變數 (42) 與 (43) 以及違約共變數 (46) 與 (47) 中的 $\mathbf{b}_i$ 參數，會直接影響這些共變數的大小。

參考文獻

Gourieroux, C., J.-P. Laurent, and O. Scaillet, 2000, "Sensitivity Analysis of Values at Risk," *Journal of Empirical Finance* 7, 225--245.

Merino, S. and M. Nyfeler, 2004, "Numerical Techniques for Determining Portfolio Credit Risk," in *CreditRisk$^+$ in the Banking Industry,* Eds. by V. M. Gundlach and F. B. Lehrbass, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 279--310.

Wong, J., K-f. Choi, and T. Fong, 2006, "A Framework for Macro Stress Testing the Credit Risk of Banks in Hong Kong," *Hong Kong Monetary Authority Quarterly Bulletin,* December.