市場風險壓力測試及其視窗化操作模型之建置

受委託單位:國立清華大學

研究主持人:鍾經獎 教授(國立清華大學計量財務金融學系)

研究期程:中華民國111年7月至113年2月

研究經費:新臺幣847,000元

中央銀行 委託研究中華民國 113 年 5 月

(本報告內容純係作者個人之觀點,不應引申為本機關之意見)

中央銀行委託研究計畫期末報告 市場風險壓力測試及其視窗化操作模型之建置

國立清華大學 鍾經獎 2024-1

摘要

本計畫的目標是建置一個可經常性重評並監控台灣所有本國銀行系統市場風險的經濟資本系統,底層是涵蓋股權、外匯、及利率曝險的市場風險實證模型,將引用來自央行歷年收集之本國銀行的市場曝險資料、以及總體財經資料進行模型參數估計,可用來進行蒙地卡羅模擬計算以導出本國銀行的市場風險值。在本計劃中,我們將導入壓力測試情境求導在壓力情境下風險值,並得以評估達到危機程度的壓力情境,有助於前瞻銀行業在嚴重但合理的壓力情境下系統性風險的變化,並辨識重大風險的可能來源。

市場風險壓力測試及其視窗化操作模型之建置

1	緒論			1
2	視窗	操作		5
	2.1	匯率與	股價模型視窗的操作	5
	2.2	利率模	型視窗的操作	8
3	風險	模型		23
	3.1	匯率與	股價指數的風險值	23
	3.2	匯率與	股價指數的計量模型	23
		3.2.1	ARFIMA 模型	23
		3.2.2	單變量 GARCH 模型	24
		3.2.3	統計分配	25
		3.2.4	多變量 GARCH 模型	27
	3.3	利率模	型	

緒論

市場風險內部模型法/風險值評估程式 MRM® 是根據鍾經獎 2017 年所提的市場風險模型所建置的「圖像式使用者介面」(Graphic User Interface, GUI),使用者只需將股價、匯率、利率的時間序列資料,以及台灣各銀行最近一個月的股權、外匯、利率曝險橫斷面資料,以規定的形式置於 Excel 檔中,便可相當輕鬆的使用 MRM® 程式深入分析台灣全體銀行的股權、外匯、利率市場風險,並計算對應的風險值。

本計畫的基本目標是移轉評估與監控台灣銀行體系市場風險的技術。根據我承接政府計畫的多年經驗,我發現以電腦程式爲基礎的量化分析技術不易移轉,因此,除了紙本報告外,不少極具實用價值的計畫隨著計畫結束而無法持續維護,一個重要的原因是電腦程式過於繁雜(不見得的是難),包括一序列的子程式,計畫主持人在時間壓力下編寫程式只能產生主要結果,很難有時間針對各種情況做足各種子程式,更重要的是,通常都沒有時間進行完整的文件化,再加上計畫主持人在執行計畫過程中遇到問題時,常根據多年累積的經驗以及當時對整個計畫的瞭解,隨之提出難以文件化的即時性解決方案,這使得原本可能並不複雜的程式常因在中間過程中引入諸多解決次要問題的附加程式,而最終成爲一個旁人很難接收的繁雜工程,事實上,同樣的問題甚至常使計畫主持人本身在一段時間後也無法複製自己之前所得到計算結果(財經實證論文的作者在在一段時間後無法複製論文結果是相當常見的現象)。

由於對央行金檢處而言,計算市場風險值以作爲監控銀行業風險的量化依據是一個經常性的業務,央行如何有效接收並能長期維護之前所做出的實證模型及計算方法便成爲一個必須解決的問題,爲此我便開發出本計畫的主要成果-圖像式使用者介面 MRM® 程式,這個程式除了能讓使用者方便的定期得到市場風險監控指標外,程式設計的另一個重要考量是盡量將操作的關鍵中間步驟圖像化,容許使用者除了輸入必要的初始參數外,也可選擇性的根據實際需要輸入中間步驟的參數,這會讓使用者(不得不)對程式有相當程度的瞭解,特別是對一些十分影響計算結果之關鍵參數的瞭解。由於圖像式使用者介面 (Graphic UserInterface, GUI) 極易操作,使用者可不斷的測試不同參數並觀察比較對計算結果的影響,唯有經過相當的測試才能獲得最合理的最終結果,而這個過程本身也是一個重要的學習過程。

MRM® 程式是使用微軟公司的 C#與 WPF (Window Presentation Foundation) 程式語言所編製, 而進行底層 運算的矩陣操作以及計量經濟模型的統計分析則仰賴 R 程式語言, 程式因結合多種程式語言而極其複雜, 但由之所得到的 GUI 則能對市場風險的分析提供前所未有的深度與操作便利性。

程式安装 由於 MRM 程式仰賴 R 程式語言, 所以使用 MRM 程式前必須先行安裝 4.2.3 版的 R (並非最新版)。此外, 尚需安裝 Pandoc 軟體, 請到 https://github.com/jgm/pandoc/releases/tag/3.1.11.1 網址下載及安裝 Pandoc 程式, 安裝 Pandoc 的過程會自動將其路徑加到 Windows 系統的 Path 環境參數序列, 但還請檢查確認。

資料檔與資料夾的設定 本程式需要四個 Excel 資料檔: 一個匯率資料檔、一個股價資料檔以及兩個利率資料檔 (這四個資料檔的格式有相當嚴格的規範, 請見之後第 2.1 與第 2.2 節的說明), 使用者要這四個將 Excel 資料檔置 於一個特定的資料夾。

爲便於接下來的說明,假設匯率資料檔的名稱是 'FXM2023Q2.xlsx'、股價資料檔的名稱是 'StockM2023Q2.xlsx'、兩個利率資料檔的名稱是 'IRM2023Q2.xlsx' 與 'IRD2023Q2.xlsx'),再假設我們將這四個資料檔置於一個名稱爲 'C:/users/C/MRM/' 的資料夾中。

啓動程式 啟動 MRM 程式 後可見如圖 1.1 所示的三個方塊選項:「外匯曝險」、「股權曝險」、與「利率曝險」。使用者首先要做的就是按選頁明正上方 (圖 1.1 中紅圈所示位置)「主資料夾」列最右端的圓形按鈕,並選取之前所述四個資料檔所在的資料夾 (亦即 'C:/users/C/MRM/') 作爲本程式的主資料夾,然後在下方「模組序號」列按選最右端的「新建」圓形按鈕,在其左方窗格中便會顯示 'MRM2024_02_17_09_26',這將是主資料夾下一個新建子資料夾的名稱,本程式所將產生的檔案 (主要是儲存計算結果的檔案) 都將置於這個新建子資料夾中。



圖 1.1

完成模組建置後,便可點選任一方塊進入如圖 1.2、圖 1.3 或圖 1.4 所示之對應的「匯率風險」、「股價風險」或「利率風險」視窗,而在進入這些視窗後,只需點選右上角的左向箭頭便可退回圖 1.1 畫面。¹

若之前已建置模組並儲存模型設定,則啟動 MRM 程式後便會看到前次最後操作的模組,可直接進入「匯率模型」、「股價模型」或「利率模型」視窗,所將看到的也會是之前儲存的模型設定。若之前已建置多個模組並儲存不同的模型設定,則可在這些已建模組中擇一操作。

¹第一次按選方塊時待機時間會較久, 這是因爲程式在準備所需 R 套件的設定, 之後再按選其他方塊時待機時間就短多了。



圖 1.2

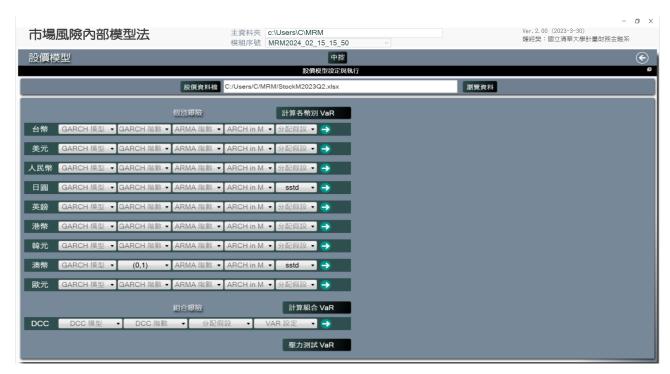


圖 1.3

指論

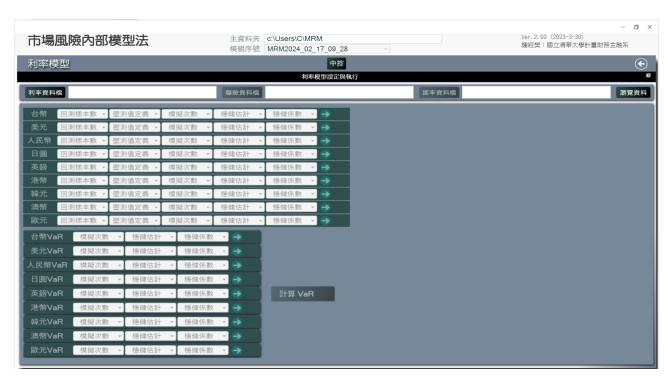


圖 1.4

2.1 匯率與股價模型視窗的操作

進入如圖 1.2 所示的匯率模型視窗, 台灣銀行業持有多國的外匯曝險, MRM 程式可對其中 8 種幣別 (美元、人民幣、日圓、英鎊、港幣、韓元、澳幣、歐元) 的曝險進行操作。

使用者首先須按選上方左側的「匯率資料檔」按鈕以啟動檔案操作視窗,使用者便可在開啟的主資料夾中選取 匯率資料檔,按鈕右側的窗格便會呈現選取檔的檔案,程式也會同時檢查選取檔是否符合格式規範的要求,若不符 合便會看到彈出的錯誤信息視窗,可在修正選取檔後再試。

匯率與股價資料檔的格式

匯率與股價資料檔的格式要求非常接近,兩種資料檔都必須是包含兩個工作表的 Excel 檔,

第一個工作表是「價格資料」, 欄列結構 (參見圖 2.1 的匯率資料與圖 2.2 的股價資料) 如下:

- 第一列是標題,將從第二列開始讀取資料,對總列數的多少沒有限制
- 匯率資料檔 9 欄、股價資料檔 10 欄:
 - 第一欄是日期, 格式爲 202305 (代表 2023 年 5 月) 等
 - 匯率資料檔的第二欄到第九欄依序分別包含美元、日圓、英鎊、港幣、韓元、人民幣、澳幣、歐元的匯率時間序列資料,其中美元對台幣的匯率是直接報價(價格報價匯率),其他幣別則對美元的匯率,其中日圓、港幣、韓元、人民幣是直接報價(價格報價匯率),但英鎊、澳幣、歐元則是間接報價(數量報價匯率)
 - 股價資料檔的第二欄到第十欄依序分別包含台幣、美元、日圓、英鎊、港幣、韓元、人民幣、澳幣、歐元 的股價指數時間序列資料

第二個工作表是「各銀行單月的曝險金額」,欄列結構(參見圖 2.3 的外匯曝險與圖 2.4 的股權曝險)如下:

- 數值資料應從第3列開始,對總列數的多少沒有限制
 - 第3列是全體銀行的各幣別總曝險金額
 - 第 4 列起分別是個別銀行的各幣別總曝險金額
- 匯率資料檔 10 欄、股價資料檔 11 欄: 第一欄顯示曝險資料月份 (所有列均爲同一月份)
 - 第二欄是各銀行名稱代碼
 - 匯率資料檔的第三欄到第十欄依序分別包含美元、日圓、英鎊、港幣、韓元、人民幣、澳幣、歐元的股權 曝險金額,以千元表示,可爲 0
 - 股價資料檔的第三欄到第十一欄依序分別包含台幣、美元、日圓、英鎊、港幣、韓元、人民幣、澳幣、歐元的股權曝險金額,以千元表示,可爲 0

基本統計量

進入「匯率模型」視窗後可做的第一個操作是按選匯率資料檔檔名右端的「瀏覽資料」按鈕,審視如圖 2.5 所示的基本統計量,其中包括 9 個趨勢圖,分別是 8 種匯率報酬率 (成長率) 再加上一個以曝險金額爲權數的加權報酬率。圖示下半是台灣所有銀行在最近一期 (2023/6) 所持有之 8 種幣別曝險金額的直方圖。

設定個別幣別的單變量模型參數

在圖 2.5 左半所列舉的每一幣別橫列均包含「GARCH 模型」、「GARCH 階數」、「ARMA 階數」、「ARCH in M」以及「分配假設 | 五組下拉選單、使用者可逐一按選各窗格右端的小箭頭彈出選單、點選所要的選項。

表 2.1 列舉這 5 個下拉選單內的所有選項, 第二欄是各種不同種類的 GARCH 模型設定, 將在之後第 3.2.2 小節說明。第 5 欄列舉的是 3 種 ARCH-in-Mean (archm) 模型設定, 將在之後第 3.2.1 小節說明。最後一欄的分配假設分別是: norm (the normal distribution)、snorm (the skew-normal distribution)、std (the student-t)、sstd (the skew-student)、ged (the generalized error distribution)、sged (the skew-generalized error distribution)、nig (the normal inverse gaussian distribution)、ghyp (the generalized hyperbolic distribution)、jsu (Johnson's SU distribution)、ghst (the generalized hyperbolic skew-student distribution),將在之後第 3.2.3 小節說明。

最後一列顯示各個參數的內建值 (內建值分別都是各下拉選單的第一個選項),由此可知內建模型設定是一個沒有 ARCH-in-Mean 效果的 ARMA(1,1)-gjrGARCH(1,1) 單變量模型。使用者若未主動使用下拉選單選取異於內建值的選項,MRM 程式將自動採用內建模型參數進行之後的計算,我們將在本報告的最後一章說明表 2.1 中所有參數選項所代表的模型設定。

參數	GARCH 模型	GARCH 階數	ARMA 階數	ARCH in M	分配假設
	gjrGARCH	(1,1)	(1,1)	archm 0	sged
	eGARCH	(1,0)	(1,0)	archm 1	sstd
	sGARCH	(0,1)	(0,1)	archm 2	nig
	арАКСН	(0,0)	(0,0)		snorm
台曲4	iGARCH	(2,2)	(2,2)		ged
參數 選項	figarch	(2,0)	(2,0)		std
	CSGARCH	(0,2)	(0,2)		norm
	TGARCH	(2,1)	(2,1)		ghyp
	AVGARCH	(1,2)	(1,2)		jsu
	NGARCH				ghst
	NAGARCH				
內建值	gjrGARCH	(1,1)	(1,1)	archm 0	sged

表 2.1 單變量股價模型參數

在對一個幣別設定橫列完成五個參數的設定後,便可按選最右端的右向箭頭啟動對該幣別的單變量模型估計 及回顧測試,此時右向箭頭的右邊便會出現黃色方塊,代表估計正進行中。若右向箭頭的右邊黃色方塊轉成綠色方 塊,便表示估計成功,在螢幕正中央便會彈出一個如圖 2.6 所示的視窗,(這裡是以美元爲範例的估計結果),其內包 含正在處理幣別的單變量模型參數估計值及多個檢定統計量,使用者可進入彈出視窗上下瀏覽(若有需要亦可儲存 之,存檔名稱可自訂)。一般而言,我們希望 ARMA 係數與 GARCH 係數估計值都是統計顯著。

圖 2.7 所示是彈出視窗下面的圖示結果, 顯示的是回顧測試 20 個樣本值的結果。

若估計失敗,則會出現紅框,自然也就不會有如圖 2.6 與 2.7 所示的結果,此時便應回頭改換設定橫列之五個下拉選單中一個或多個參數。我們要強調,縱使模型能夠成功估計(出現彈出視窗),但若估計時間過久、參數估計值不顯著、多個模型設定檢定未過關、回顧測試未過關等,都應重設模型參數再估計,直到得到滿意的估計結果爲止。

單變量模型的回顧測試

圖 2.7 所示的單變量回顧測試是根據樣本的最後 20 筆資料 (2021/10 到 2023/6),其做法是使用 2021/10 之前的資料進行模型估計,然後根據其參數估計值對 20 筆保留樣本的每一筆進行滾動式的預測,除了計算平均值 (圖 2.7 右圖中的綠線所示)外,最重要的就是使用模擬 (模擬次數爲 10,000)計算 5%的 VaR (風險值),是以圖 2.7 之圖內下方的黃線呈現。原則上圖中的白色樣本點應該除了少數例外都應在黃線的上方。落在黃線下方的樣本點將以紅色呈現,便是所謂的「超越樣本」,其個數稱爲「超越數」,是作爲檢定回顧測試是否過關的核心統計量,一般是採兩種假設檢定步驟: Kupiec Test 與 Christofferson Test,圖 2.7 上方除列舉超越數 (以及對應 5% VaR 的理論超越數),還列舉了這兩個檢定的 p 值,此 p 值應越接近 1 越好。若根據一特定模型設定得到的超越數過大以至於對應的 p 值未達 5%的水準,便有必要改變模型設定重新估計及回測。

包含所有幣別的多變量模型

逐一完成對 9 種幣別的單變量模型設定及回顧測試後,所有 9 種幣別設定横列的右端都出現綠框,就可在最下端的 DCC 設定橫列開始對一個包含所有幣別之多變量模型的「DCC 模型」、「DCC 階數」、「分配假設」、「VAR 設定」下拉選單進行參數設定,並按選最右端右向箭頭啟動多變量模型的估計,這個多變量模型採用 the Dynamic Conditional Correlation (DCC) model 將之前所選定的單變量模型加以組合,我們將在最後一章說明 DCC 模型的細節。

DCC 多變量模型的估計最費時,成功後可得到如圖 2.8 所示的估計結果類似之前單變量的圖 2.6 與 2.7,若估計失敗或是估計結果不佳,便要重新設定 DCC 模型的參數,直到得到滿意的估計結果爲止。

計算個別幣別的 VaR 值

接下來便可按選頁面中上方「計算各幣別 VaR」的矩形按鈕, MRM 程式將自動逐一計算 9 種幣別基於單變量模型的 VaR 值, 並將所有計算結果整合爲如圖 2.9 所示的直方值, 以及加總 VaR 值的橫向直方值。

計算組合模型的 VaR 値

再接下來便可按選中下方「計算組合 VaR」的矩形按鈕,得到如圖 2.10 所示之由組合多變量模型所求導的組合 VaR 值,其中還複製了之前由各個單變量 VaR 值所加總而得的加總 VaR 值以供比較,我們發現由多變量模型所導出的全體 VaR 值 43.999 億元,少於由單變量模型所計算而得之個別 VaR 的加總 57.278 億元,由此可知,各個幣別之間呈負相關而彼此互補,若將此互補關係納入考量,將有助於降低風險並得以減少 VaR 值。

按選「計算組合 VaR」按鈕除了製作圖 2.10 外,還會在現行資料夾中加入如圖 2.11 所示的 HTML 檔,其中包含 2.10 圖示以及 VaR 值的列表。圖 2.11 表格的第四欄列舉由多變量模型參數估計值所計算之個別幣別 VaR (換言之,一旦得到多變量模型的估計值,除了對所有幣別進行模擬以計算全體 VaR 值外,還可對個別變量逐一進行模擬以計算對應的個別 VaR 值),由於 VaR 不具可加性,將第四欄的前 8 個數字加總 (59.08 億元)並不等於底端之由多變量模型所直接導出的全體 VaR 值 43.999 億元。我們還要指出,第四欄的橘色數字代表大於其左邊由單變量

模型所得到的個別幣別 VaR 值, 而綠色數字代表小於者, 由此可知, 由多變量模型所計算而得的個別 VaR 值幾乎都大於對應的單變量 VaR 值, 但由多變量模型所得到的全體 VaR 值卻會得到全然相反的結果。

圖 2.11 表格的第 5 與第 6 欄分別是第 4 與第 5 欄所列舉之 VaR 值除以總曝險金額所得到的 VaR 百分比率,不到 3% 的佔比顯示台灣銀行業匯率曝險的風險程度並不高。

計算壓力情境下的 VaR 值

接下來可按選頁面最下方「壓力測試 VaR」的矩形按鈕,得到如圖 2.12 所示的壓測 VaR 值,以及加總之後的 VaR 值。此外,在現行資料夾中尚包括如圖 2.13 所示的對應 HTML 檔,包含 2.12 的圖示以及對應壓測 VaR 值的列表。

壓力情境下之 VaR 值 (簡稱壓測 VaR) 的定義如下: 針對 36 筆最近期的樣本進行立基於單變量模型的回顧測試,在 36 個 1% VaR 中找出絕對值最大者,若有超越樣本再求導超越值最大者,兩者相加便是 MRM 程式所計算的壓測 VaR 值,這種根據過去 3 年之未預期價格跌幅最慘重者,並再根據最嚴重例外狀況加以調大所得到的 VaR 值,應屬立基於 3 年實證結果且具足夠保守性的估計,我們要強調這裡的壓測 VaR 值都是根據較保守的單筆量模型估計。

圖 2.13 表格中各欄的定義類似圖 2.11,其中第 3 欄的「正常 VaR」取自於之前圖 2.11 表格的第 3 欄,乃由單變量模型所導出之各幣別的 VaR 值,第 4 欄的「壓測 VaR」便是由單變量模型所導出之各幣別的壓測 VaR 值。一般而言我們預期壓測 VaR 值應大於正常 VaR 值,但圖 2.13 表格顯示壓測 VaR 值只是稍大於正常 VaR 值,這些結果更進一步彰顯外匯曝險的低風險,以綠色呈現之日圓及歐元曝險的壓測 VaR 值甚至微幅低於正常 VaR 值,顯示其過去 3 年的匯率變動幅度相對較小,無法產生有實證基礎的壓測值。

股價曝險的 VaR 值

這裡我們接續前述的分析,提出股價曝險與利率曝險的 VaR 值結果。由於股價模型的操作與分析與匯率模型完全相同,故不再複述。

圖 2.14 展示的是股價曝險的 VaR 值, 而圖 2.15 則是股價曝險的的壓測 VaR 值。相對於外匯曝險, 股價曝險的 VaR 值比率要高達 6 倍以上, 而多變量模型下股價曝險的 VaR 值也因曝險之間的互補關係而下降超過一半。各幣別股價曝險的壓測 VaR 值全都高於對應的正常 VaR 值, 特別是美元曝險, 高出的幅度超過兩倍, 彰顯股價曝險的高風險。

2.2 利率模型視窗的操作

進入如圖 1.4 所示的利率模型視窗,使用者首先須按選上方左側的「利率資料檔」按鈕以啟動檔案操作視窗,使用者便可在開啟的主資料夾中選取並讀入利率資料檔,接著再按選右側的「曝險資料檔」按鈕以選取並讀入曝險資料檔,最後再按選最右側的「匯率資料檔」按鈕以選取並讀入匯率資料檔,每次讀入資料檔程式便會同時檢查選取檔是否符合格式規範的要求,若不符合便會看到彈出的錯誤信息視窗,可在修正選取檔後再試。

利率資料與股價資料一樣,也有9種不同的幣別,因而必須讀入最近一期的匯率以將不同幣別的利率曝險轉換 爲以台幣表示。

利率資料檔的格式

我們需要兩個利率 Excel 資料檔,一個是利率資料檔,另一個曝險資料檔,

2.2 利率模型視窗的操作

利率資料檔: 利率資料檔的欄列結構 (參見圖 2.16) 如下:

- 第一列是標題,將從第二列開始讀取資料,對總列數的多少沒有限制
- 利率資料檔 150 欄:
 - 第一欄是日期, 格式爲 202305 (代表 2023 年 5 月) 等
 - 第二欄之後的 149 欄依序分別包含美元、日圓、英鎊、港幣、韓元、人民幣、澳幣、歐元之百分比表示的 利率時間序列資料。利率分期限,且不同幣別的利率涵蓋各不相同的期限:
 - 1. 台幣: 62 個期限
 - 2. 美元: 11 個期限
 - 3. 日圓: 14 個期限
 - 4. 英鎊: 11 個期限
 - 5. 港幣: 9 個期限
 - 6. 韓元: 8 個期限
 - 7. 人民幣: 12 個期限
 - 8. 澳幣: 8 個期限
 - 9. 歐元:14 個期限

所有總共有149個期限,每一個期限的利率資料佔一個欄位。

因涵蓋多個期限,一些期限的利率資料常有缺漏值, MRM 程式將一律採用內插法填補缺漏值, 若缺漏值佔比 超過一半, 便將捨棄該期限的利率資料。

利率曝險檔: 利率曝險金額的欄列結構 (參見圖 2.17) 如下:

- 從第 C 欄到第 AC 欄, 總共 27 欄, 每一種幣別的曝險金額跨 3 欄, 依序爲「長部位」、「短部位」與「淨部位」
- 從第 4 列到第 18 列, 總共 15 列:
 - 息票利率低於 3% 者分爲 15 類:

1 個月以內、超過1個月而在3個月以內、超過3個月而在6個月以內、超過6個月而在12個月以內、超過1年而在1.9年以內、超過1.9年而在2.8年以內、超過2.8年而在3.6年以內、超過3.6年而在4.3年以內、超過4.3年而在5.7年以內、超過5.7年而在7.3年以內、超過7.3年而在9.3年以內、超過9.3年而在10.6年以內、超過10.6年而在12年以內、超過12年而在20年以內、20年以上

○ 息票利率高於或等於 3% 者分爲 13 類:

1 個月以內、超過 1 個月而在 3 個月以內、超過 3 個月而在 6 個月以內、超過 6 個月而在 12 個月以內、超過 1 年而在 2 年以內、超過 2 年而在 3 年以內、超過 3 年而在 4 年以內、超過 4 年而在 5 年以內、超過 5 年而在 7 年以內、超過 7 年而在 10 年以內、超過 10 年而在 15 年以內、超過 15 年而在 20 年以內、20 年以上

利率曝險金額均以千元表示,可以爲0。

基本統計量

進入「利率模型」視窗後可做的第一個操作是按選利率資料檔檔名右端的「瀏覽資料」按鈕,審視如圖 2.18 所示的基本統計量,其中包括 10 個趨勢圖,分別是 9 種利率再加上一個以曝險金額爲權數的加權利率。圖示下半是台灣所有銀行在最近一期 (2023/6) 所持有之 9 種幣別曝險金額的直方圖。

設定個別幣別的單變量模型參數

在圖 2.19 中所列舉的每一幣別橫列均包含「回測樣本數」、「壓測值定義」、「模擬次數」、「穩健估計」以及「穩健係數」下拉選單、「可逐一按選各窗格右端的小箭頭彈出選單、然後點選所要的選項。

單變量模型的回顧測試

圖 2.19 所示的單變量回顧測試是根據樣本的最後 36 筆資料 (2020/7 到 2023/6),其做法是使用 2020/7 之前的資料進行模型估計,然後根據其參數估計值對 36 筆保留樣本的每一筆進行滾動式的預測,除了計算平均值 (圖 2.19 右圖中的綠線)外,最重要的就是使用模擬 (模擬次數爲 100,000)計算 5%的 VaR,圖 2.19 之右圖內下方的黃線呈現,至於圖示標題所示的回顧測試檢定結果與之前匯率模型完全一樣。

計算個別幣別的正常 VaR 與壓測 VaR

接下來便可按選中下方「計算 VaR」的矩形按鈕,程式將自動逐一計算 9 種幣別基於單變量模型的 VaR,並將之整合爲如圖 2.20 所示的正常 VaR 值與壓測 VaR 值,及其加總值。在現行資料夾中尚有對應的 HTML 檔,包含 2.20 的圖示以及如圖 2.21 的列表。

利率模型之壓測 VaR 的定義如下: 針對 36 筆最近期的樣本進行立基於單變量模型的回顧測試,在 36 個 1.5% VaR 中找出絕對值最二大者 (使用者亦可改設爲最大者或是第三大者),若有超越樣本再求導超越值最大者,兩者 相加便是 MRM 程式所計算的利率風險壓測 VaR 值。

圖 2.21 表格中各欄的定義類似之前圖 2.11,其中第 3 欄的「正常 VaR」乃由單變量模型所導出之各幣別的 VaR 值,第 4 欄的「壓測 VaR」便是由單變量模型所導出之各幣別的壓測 VaR 值。圖 2.21 表格顯示壓測 VaR 值都 遠大於正常 VaR 值,特別是曝險金額龐大的台幣,彰顯近年來利率曝險的風險十分嚴峻,其中英鎊的壓測 VaR 值 雖等於英鎊曝險值,但因曝險金額占總曝險比重相對較小,壓測結果對整體影響不大。

¹請參見第3章的註2(在第29頁)關於穩健估計與穩健係數的說明。

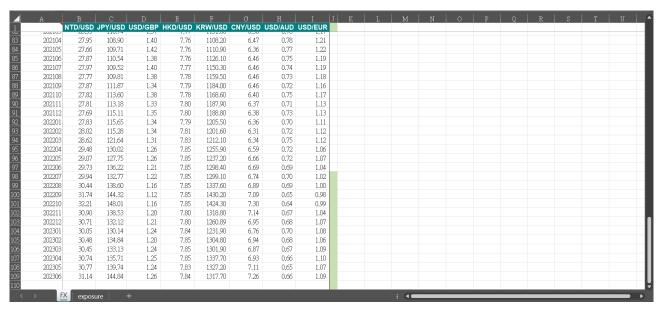


圖 2.1

Α	В	С	D	Е	F	G	Н	I	J	K	L	M	N	О	P	Q	R	
	equity_TW	equity_US	equity_JP	equity_UK	equity_HK	equity_KR	equity_CN	equity_AU 6	equity_EU									
202107	17247.41	34935.47	27283.59	7032.3	25961.03	3202.32	3397.357	7392.624	4089.3									
202108	17490.29	35360.73	28089.54	7119.7	25878.99	3199.27	3543.94	7534.899	4196.41									
202109	16934.77	33843.92	29452.66	7086.42	24575.64	3068.82	3568.167	7332.159	4048.08									
202110	16987.41	35819.56	28892.69	7237.57	25377.24	2970.68	3547.336	7323.737	4250.56									
202111	17427.76	34483.72	27821.76	7059.45	23475.26	2839.01	3563.887	7255.97	4063.06									
202112	18218.84	36338.3	28791.71	7384.54	23397.67	2977.65	3639.775	7444.642	4298.41									
202201	17674.4	35131.86	27001.98	7464.37	23802.26	2663.34	3361.44	6971.632	4174.6									
202202	17652.18	33892.6	26526.82	7458.25	22713.02	2699.18	3462.306	7049.125	3924.23									
202203	17693.47	34678.35	27821.43	7515.68	21996.85	2757.65	3252.203	7499.588	3902.52									
202204	16592.18	32977.21	26847.9	7544.55	21089.39	2695.05	3047.063	7435.014	3802.86									
202205	16807.77	32990.12	27279.8	7607.66	21415.2	2685.9	3186.427	7211.172	3789.21									
202206	14825.73	30775.43	26393.04	7169.28	21859.79	2332.64	3398.616	6568.063	3454.86									
202207	15000.07	32845.13	27801.64	7423.43	20156.51	2451.5	3253.238	6945.15	3708.1									
202208	15095.44	31510.43	28091.53	7284.15	19954.39	2472.05	3202.138	6986.756	3517.25									
202209	13424.58	28725.51	25937.21	6893.81	17222.83	2155.49	3024.39	6474.198	3318.2									
202210	12949.75	32732.95	27587.46	7094.53	14687.02	2293.61	2893.483	6863.459	3617.54									
202211	14879.55	34589.77	27968.99	7573.05	18597.23	2472.53	3151.335	7284.172	3964.72									
202212	14137.69	33147.25	26094.5	7451.74	19781.41	2236.4	3089.258	7038.688	3793.62									
202301	15265.2	34086.04	27327.11	7771.7	21842.33	2425.08	3255.669	7476.661	4163.45									
202302	15503.79	32656.7	27445.56	7876.28	19785.94	2412.85	3279.605	7258.399	4238.38									
202303	15868.06	33274.15	28041.48	7631.74	20400.11	2476.86	3272.86	7177.754	4315.05									
202304	15579.18	34098.16	28856.44	7870.57	19894.57	2501.53	3323.275	7309.152	4359.31									
202305	16578.96	32908.27	30887.88	7446.14	18234.27	2577.12	3204.564	7091.311	4218.04									
202306	16915.54	34407.6	33189.04	7531.53	18916.43	2564.28	3202.062	7203.299	4399.09									

圖 2.2

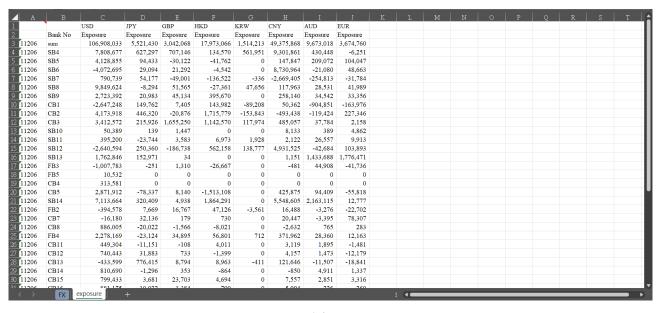


圖 2.3

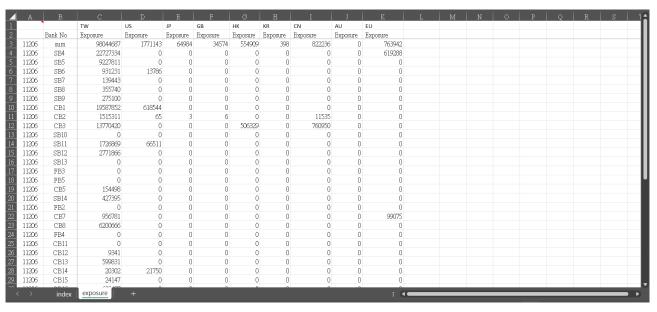


圖 2.4



圖 2.5

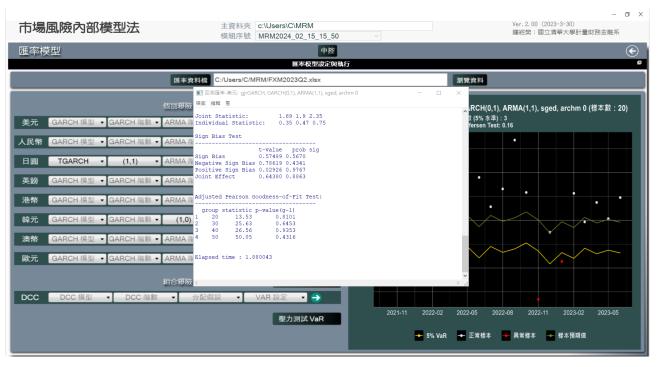


圖 2.6



圖 2.7

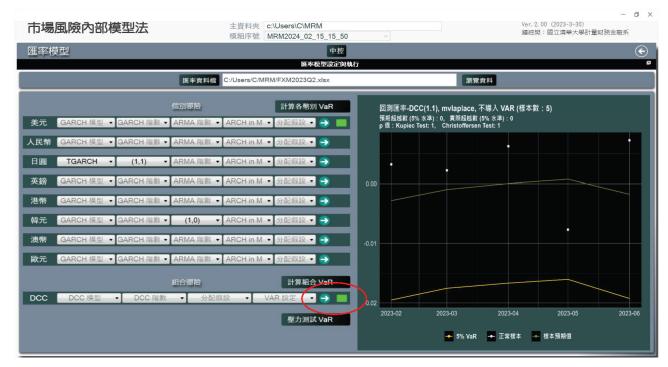


圖 2.8



圖 2.9



圖 2.10



圖 2.11



圖 2.12



圖 2.13



圖 2.14

[ht]



圖 2.15

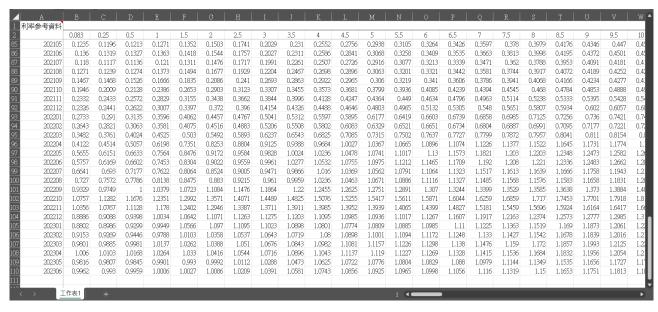


圖 2.16

⊿ A		C	D			G				K
各銀行持有利率曝險餘額	11206	sum								
息票利率3%(含)以上	息票利率3%(含)以上 息票利率低於3%		NTD			USD			JPY	
		長部位	短部位	淨部位	長部位	短部位	淨部位	長部位	短部位	淨部位
1個月以內	1個月以內	3476110338	2823775832	1208867147	123930039	108476865	26065872	1149068636	796924451	42837250
超過1個月而在3個月以內	超過1個月而在3個月以內	3834037480	4306563106	982584570	118008209	91032961	36290144	306167252	190420569	14796997
超過3個月而在6個月以內	超過3個月而在6個月以內	1285040997	1909172500	888379780	74010989	45503457	30990925	272408114	275760048	9233172
超過6個月而在12個月以內	超過6個月而在12個月以內	1160375753	1433875969	475002276	50954448	38015688	17002441	196675489	241044958	8347467
超過1年而在2年以內	超過1年而在1.9年以內	545006973	498893338	69437218	6911747	7220347	1229989	10776969	22640795	1216879
超過2年而在3年以內	超過1.9年而在2.8年以內	385985613	307582900	80225200	3444782	2215213	1473661	9091772	2626177	646559
超過3年而在4年以內	超過2.8年而在3.6年以內	250384134	214515715	57583751	1653409	1084244	1088083	1901010	0	190101
超過4年而在5年以內	超過3.6年而在4.3年以內	236032719	212260819	60600386	2160837	1359291	869346	1684599	3992506	230790
超過5年而在7年以內	超過4.3年而在5.7年以內	264728739	243368752	53718440	1370001	822642	676880	702821	0	70282
超過7年而在10年以內	超過5.7年而在7.3年以內	154859234	119136136	40177918	1022277	743764	356933	946963	6859244	678800
超過10年而在15年以內	超過7.3年而在9.3年以內	238036802	322573587	95994878	688938	519052	468896	0	0	
超過15年而在20年以內	超過9.3年而在10.6年以內	57146683	46176090	20106663	177561	49233	149353	351651	0	35165
20年以上	超過10.6年而在12年以內	328996	0	328996	1486392	2067185	648349	0	0	
7	超過12年而在20年以內	14421583	200000	14621583	25000	122972	137972	0	0	
8	20年以上	2853838	0	2853838	178749	52100	181549	0	0	
9										
0										
1										
2										
< > sum SB4 SB5	SB6 SB7 SB8 SB9 C	CB1 CB2 C	B3 SB10 SI	B11 SB12 S	··· + : 1					

圖 2.17



圖 2.18



圖 2.19



圖 2.20



圖 2.21

風險模型

由於匯率、股價、與即期利率(以及對應的折現率)是驅動各自市場風險損失分配的風險因子,在本章中我們所將介紹的匯率、股價、與即期利率的實證模型,這些模型的估計結果將成爲模擬各自損失分配的基礎。

3.1 匯率與股價指數的風險值

給定第i種匯率(以新臺幣表示)或是第i種股價指數在第t月之樣本值 X_{it} 的報酬率(變動率)是

$$y_{it} := \frac{\Delta X_{it}}{X_{i:t-1}} = \frac{X_{it} - X_{i,t-1}}{X_{i:t-1}} \approx \Delta \ln X_{it} = \ln X_{it} - \ln X_{i,t-1}, \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

我們將假設包含所有 m 種報酬率的向量 $\mathbf{y}_t = [y_{1t} \ y_{2t} \ \dots \ y_{mt}]$ 是以 $\boldsymbol{\mu}_t$ 爲條件期望值、以 \mathbf{H}_t 爲變異數共變數矩 陣的 m 維 \mathcal{F} 分配。

損失分配與風險値的求導 給定 V_{iN} 是第 i 種外匯或股價在第 N 月的曝險, $\mathbf{v}_N = [V_{1N} \ V_{2N} \ \dots \ V_{mN}]$ 是包含所有 m 種外匯或股價曝險的向量,則所有外匯或股價曝險在第 N+1 月的損失

$$L_{N+1} = -\mathbf{v}_N'\mathbf{y}_{N+1},$$

便是以 $-\mathbf{v}_N'\boldsymbol{\mu}_{N+1}$ 爲條件期望值、以 $\mathbf{v}_N'\mathbf{H}_{N+1}\mathbf{v}_N$ 爲條件變異數的單維 \mathcal{F}' 分配。由之便可求導所有 m 種外匯或股價曝險之信賴水準爲 99% 的月風險值,假設一個月有 20 個工作日,以月資料所求得就將是 20 日的風險值,只需除以 $\sqrt{2}$ 便可得到 10 日的風險值。

3.2 匯率與股價指數的計量模型

我們將假設第 i 種匯率或是股價指數在第 t 月的報酬率 (變動率) y_{it} 遵從 ARFIMA-GARCH 模型。

3.2.1 ARFIMA 模型

針對 y_{it} 的條件期望值是採如下的 ARFIMA(a, d, b) 模型設定:

$$\Phi(L)(1-L)^d(y_{it}-\mu_{it})=\Theta(L)\,\varepsilon_{it},$$

其中 d 可以是 1、0 或是介於 0 與 1 之間的分數,

$$\Phi(L) = 1 - \sum_{i=1}^{a} \phi_j \cdot L^j, \qquad \Theta(L) = 1 + \sum_{i=1}^{b} \theta_j \cdot L^j,$$

以及

$$\mu_{it} = \mu_i + \xi \cdot \sigma_{it}^k,$$

這裡的條件期望值 μ_{it} 包含長期固定的期望值 μ_{i} 以及條件變異數 σ_{it} , σ_{it}^{k} 稱爲「ARCH-in-Mean」,代表風險/報酬之間的代換 (Trade-off) , 其中的指數 k 可以是 1 或 2 。

3.2.2 單變量 GARCH 模型

針對 y_{it} 的條件變異數, 典型的 GARCH(p,q) 模型設定是

$$\sigma_{it}^2 = \omega_i + \sum_{j=1}^q \alpha_j \cdot \varepsilon_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \cdot \sigma_{i,t-j}^2.$$

給定 GARCH 模型參數的估計值, 我們便可預測樣本外下一個月 (給定樣本數爲 N , 亦即第 N+1 月) 的股價指數報酬率平均值 \hat{y}_{N+1} 與條件變異數 \hat{h}_{N+1} 。

接下來我們將列舉 GARCH 模式的幾種衍生模型。

Exponential GARCH 模型

$$\ln \sigma_{it}^{2} = \omega + \sum_{j=1}^{q} \left[\alpha_{j} \cdot z_{i,t-j} + \gamma_{j} \cdot (|z_{i,t-j}| - \mathbf{E}|z_{i,t-j}|) \right] + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} \cdot \ln \sigma_{i,t-j}^{2}.$$

其中 $z_{i,t} = \varepsilon_{i,t}/\sigma_{i,t}$ 。在此模型中 α_i 係數捕捉 the sign effect (正負不對稱的效果) 而 γ_i 係數代表 the size effect 。

GJR-GARCH 模型

我們可進一步擴展 Exponential GARCH 模型為 GJR-GARCH 模型如下:

$$\sigma_{it}^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \left[\alpha_j \cdot \varepsilon_{i,t-j}^2 + \gamma_j \cdot \mathbf{I}(\varepsilon_{i,t-j} < 0) \cdot \varepsilon_{i,t-j}^2 \right] + \sum_{j=1}^p \beta_j \cdot \sigma_{i,t-j}^2,$$

其中 I() 是指標函數, 可導入所謂的槓桿效果 (the leverage effect), 正的干擾項 ε_{it} 與負的干擾項對條件變異數的影響不對稱。

Asymmetric power ARCH (APARCH) 模型

APARCH 模型可導入槓桿效果, 也容許報酬率絕對值的樣本變異數大於其二次項的樣本變異數:

$$\sigma_{it}^{2} = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_{j} \cdot (\left|\varepsilon_{i,t-j}\right| - \gamma_{j} \cdot \varepsilon_{i,t-j})^{\delta} + \sum_{i=1}^{p} \beta_{j} \cdot \sigma_{i,t-j}^{\delta},$$

其中 δ 係數引入 σ_{it} 的 Box-Cox 轉換, γ_i 係數代表槓桿效果。APARCH 模型有如下的特例:

- 標準 GARCH 模型: δ = 2 與 γ_i = 0
- 絕對值 GARCH 模型 (AVGARCH): $\delta = 1$ 與 $\gamma_i = 0$
- GJR-GARCH 模型: δ = 2
- Threshold GARCH 模型 (TGARCH): $\delta = 1$
- 非線性 GARCH 模型 (NGARCH): $\beta_i = 0$ 與 $\gamma_i = 0$
- log ARCH: $\delta \to 0$

一般化 GARCH 模型

我們可進一步將 APARCH 模型再一般化爲如下的設定:

$$\sigma_{it}^{2} = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_{j} \cdot \sigma_{i,t-j}^{\lambda} \cdot \left[\left| z_{i,t-j} - \eta_{2j} \right| + \eta_{1j} \cdot \left(z_{i,t-j} - \eta_{2j} \right) \right]^{\delta} + \sum_{i=1}^{p} \beta_{j} \cdot \sigma_{i,t-j}^{\lambda}$$

包含如下的特例:

- 標準 GARCH 模型: $\lambda = \delta = 0$ 與 $\eta_{1i} = \eta_{2i} = 0$
- 絕對值 GARCH 模型 (AVGARCH): $\lambda = \delta = 1$ 與 $|\eta_{1i}| < 1$
- GJR-GARCH 模型: $\lambda = \delta = 2$ 與 $\eta_{2i} = 0$
- Threshold GARCH 模型 (TGARCH): $\lambda = \delta = 1$, $|\eta_{1i}| \le 1$ 與 $\eta_{2i} = 0$
- 非線性 GARCH 模型 (NGARCH): $\lambda = \delta$ 與 $\eta_{1i} = \eta_{2i} = 0$
- 非線性非對稱 GARCH 模型 (NAGARCH): $\lambda = \delta = 2$ 與 $\eta_{1i} = 0$
- APARCH 模型: $\lambda = \delta$, $|\eta_{1i}| \leq 1$ 與 $\eta_{2i} = 0$
- ALLGARCH 模型: λ = δ

成份 GARCH (component GARCH) 模型

$$\sigma_{it}^2 = p_t + \sum_{j=1}^q \alpha_j \cdot (\varepsilon_{i,t-j}^2 - p_{i,t-j}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \cdot (\sigma_{i,t-j}^2 - p_{i,t-j}),$$

其中

$$p_{it} = \omega + \rho \cdot p_{i,t-1} + \phi \cdot (\varepsilon_{i,t-1}^2 - \sigma_{i,t-1}^2),$$

代表波動率的長期變動部份 (permanent component, long-term movements in volatility), 而 GARCH 模型則代表 波動率的短期變動部份 (transitory component, short-term movements in volatility)。

Fractionally Integrated GARCH (FI GARCH) 模型

$$\beta(L)(1-L)^d(\sigma_{it}^2-\bar{\omega}_i)=\alpha(L)\,\varepsilon_{it}^2,$$

其中 d 可以是 1×0 或是介於 0 與 1 之間的分數,

$$\beta(L) = 1 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \cdot L^j, \qquad \alpha(L) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \cdot L^j,$$

3.2.3 統計分配

給定報酬率 y_t 的條件期望值 μ_t 與條件變異數 σ_t^2 ,假設標準化後之報酬率 $z_t = (y_t - \mu_t)/\sigma_t$ 的密度函數是 $g*z_t \mid \theta$),則報酬率 y_t 的條件密度函數是

$$f(y_t | \mu_t, \sigma_t, \theta) = \frac{1}{\sigma_t} \cdot g \left[\frac{y_t - \mu_t}{\sigma_t} \middle| \theta \right].$$

這裡我們將列舉本計畫所考慮的各種單變量分配(略過常態分配)的密度函數。

26 風險模型

Student t 分配

Student t 分配的密度函數是

$$f(x | \mu, \sigma, \nu) = \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\sqrt{\sigma^2 \pi \nu} \cdot \Gamma(\nu/2)} \cdot \left[1 + \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2 \nu} \right]^{-(\nu + 1)/2},$$

其中 μ 是位置參數 (the location parameter), σ^2 是規模參數 (the scale parameter), ν 是形狀參數 (the shape parameter) 或自由度 (the degree of freedom)。 t 分配的密度函數是對稱的, 形狀參數 ν 的參數值越小, 密度函數越厚尾。

多維t分配

n維t分配的密度函數是

$$f(x|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma},\nu) = \frac{\Gamma((\nu+n)/2)}{(\pi\,\nu)^{n/2} \cdot \Gamma(\nu/2)} \cdot |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \left[1 + \frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{\nu} \right]^{-(\nu+n)/2},$$

其中 μ 是 n 維位置參數, Σ 是 $n \times n$ 規模參數, ν 是形狀參數。多維 t 分配要比多維常態分配厚尾。

Generalized error (GED) 分配

GED 分配的密度函數是

$$f(x|\alpha, \beta, \nu) = \frac{\nu \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left| \frac{x - \alpha}{\beta} \right|^{\nu}\right)}{2^{1 + \nu^{-1}} \cdot \beta \cdot \Gamma(\nu^{-1})},$$

其中 α 是位置參數, β 是規模參數, ν 是形狀參數。GED 分配的密度函數是對稱的, 其變異數是

$$Var(x) = \beta^2 \cdot 2^{2/\nu} \cdot \frac{\Gamma(3 \cdot \nu^{-1})}{\Gamma(\nu^{-1})}.$$

根據不同的形狀參數值 v GED 分配有如下的特例:

- 若 $\nu \to \infty$, 則 GED 分配便趨向均勻分配。
- 若 $\nu = 2$, 則 GED 分配便成爲常態分配。
- 若 $\nu = 1$, 則 GED 分配便成爲 Laplace 分配 (標準差是 $\sigma = 2\sqrt{2}\beta$)。

Laplace 分配

Laplace 分配的密度函數是

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \cdot \exp\left(\sqrt{2} \frac{|x-\mu|}{\sigma}\right),$$

其中 μ 是位置參數 (也是期望值、中位數、與眾數), σ 是規模參數 (也是標準差)。Laplace 分配的密度函數是對稱的, 其 excess kurtosis 是 3,大於常態分配的 0。Laplace 分配的峰高二厚尾, 絕對值大於 3 個標準差的極端值發生的機率是常態分配的 5 倍。

多維 Laplace 分配

一般化非對稱的多維 Laplace 分配的特徵函數 (characteristic function) 是

$$E(e^{i \mathbf{x}' \mathbf{t}}) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2} \mathbf{t}' \mathbf{\Sigma} t - i \boldsymbol{\mu}' \mathbf{t}}\right)^{s}$$

其中 μ 是 n 維位置參數, Σ 是 $n \times n$ 規模參數, s 是一個正值形狀參數,

$$E(\mathbf{x}) = s \cdot \boldsymbol{\mu},$$
 $Var(\mathbf{x}) = s(\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}').$

多維 Laplace 分配要比多維常態分配厚尾。

偏態化分配

給定任何單峰、對稱於 0 的密度函數 f(x), 可導入所謂的「偏態係數」(skewness parameter, inverse scale factor) ξ 使之成爲偏態的密度函數

$$f(x \mid \xi) := \frac{2}{\xi + \xi^{-1}} \cdot \left[f(\xi \cdot x) \cdot H(-x) + f(\xi^{-1} \cdot x) \cdot H(x) \right],$$

其中 H() 是所謂的 the Heaviside function:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

之前的常態分配、t 分配、與 GED 分配均可採用這個轉換而得到對應的偏態化分配:

- 若ξ介於0和1之間,則可得到負偏態化、左尾較長的分配,
- 若 ξ 等於 1,則是對稱的分配。
- 若 ξ 大於 1,則可得到正偏態化、右尾較長的分配,

3.2.4 多變量 GARCH 模型

我們可進一步假設 N 種匯率或是股價指數在第 t 月的報酬率 (變動率) 向量 \mathbf{y}_t 遵從多變量 GARCH 模型, 其條件 期望值 $\boldsymbol{\mu}_t$ 爲

$$\mathbf{y}_t \mid I_{t-1} = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \qquad \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{z}_t,$$

其中 I_{t-1} 是 t-1 時點的信息集合, \mathbf{z}_t 是 i.i.d. N 維隨機向量:

$$E(\mathbf{z}_t) = \mathbf{0}, \quad Var(\mathbf{z}_t) = \mathbf{I}_N,$$

這裡的 \mathbf{I}_N 是 N 維單位矩陣, $\mathbf{H}_t^{1/2}$ 是 N 維正定義 (positive definite) 矩陣, 因而可知 \mathbf{H}_t 是 \mathbf{y}_t 的條件變異數共變數矩陣:

$$\operatorname{Var}_{t-1}(\mathbf{y}_t) = \operatorname{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{H}_t,$$

可分解如下:

$$\mathbf{H}_{t} = \mathbf{D}_{t} \cdot \mathbf{R}_{t} \cdot \mathbf{D}_{t} = \left[\rho_{ij,t} \sqrt{h_{ii,t} \cdot h_{jj,t}} \right],$$

其中 \mathbf{D}_t 是對角矩陣 (diagonal matrix), 其對角元素是條件變異數 $h_{ii,t}$, 而 \mathbf{R}_t 是一個正定義矩陣, 包含固定的條件相關係數 ρ_{ij} 。

在 CCC (the Constant Conditional Correlation model) 的設定下, \mathbf{R}_t 是一個固定係數矩陣, 給定 \mathbf{h}_t 是包含條件變異數 $h_{ii.t}$ 的 N 維向量, 則

$$\mathbf{h}_{t} = \boldsymbol{\omega} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{t-k} \odot \boldsymbol{\varepsilon}_{t-k} + \sum_{k=1}^{q} \mathbf{B}_{k} \cdot \mathbf{h}_{t-k},$$

其中 ω 是 N 維正值係數向量, \mathbf{A}_k 與 \mathbf{B}_k 皆爲對角元素皆爲正值係數的對角矩陣, \odot 是所謂的 Hadamard operator , 代表兩個向量之間元素對元素的乘法。

在 DCC (the Dynamic Conditional Correlation model) 的設定下, **R**_t 是一個因時而變的係數矩陣, 並可進一步分解爲

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{D}(\mathbf{Q}_t)^{-1/2} \cdot \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{D}(\mathbf{Q}_t)^{-1/2},$$

其中 $\mathbf{D}(\mathbf{Q}_t)$ 是以 \mathbf{Q}_t 矩陣之對角元素爲對角元素的對角矩陣, 而

$$\mathbf{Q}_t := \bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{A}' \cdot \bar{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}' \cdot \bar{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{G}' \cdot \bar{\mathbf{Q}}^- \cdot \mathbf{G}$$

$$+ \mathbf{A}' \mathbf{z}_{t-1} \mathbf{z}_{t-1}' \mathbf{A} + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{Q}_{t-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{G}' \mathbf{z}_{t-1}^- \mathbf{z}_{t-1}^- ' \mathbf{G},$$

這裡 \mathbf{A} , \mathbf{B} 與 \mathbf{G} 皆爲 $N \times N$ 係數矩陣。當 $\mathbf{z}_t = \mathbf{D}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t$ 爲負值,則 \mathbf{z}_t^- 與之相等,否則 \mathbf{z}_t^- 便等於 0 。此外, $\bar{\mathbf{Q}}$ 與 $\bar{\mathbf{Q}}^-$ 分別是 \mathbf{z}_t 與 \mathbf{z}_t^- 的無條件變異數共變數矩陣,而 \mathbf{Q}_0 是 \mathbf{Q}_t 的起始值,必須是一個正定義的矩陣。

DCC 有三個特例: 標準版本、對稱版本 (aDCC, the asymmetric DCC) 與彈性版本 (FDCC, the flexible DCC)。

標準 DCC 模型

給定 $\mathbf{A} = \sqrt{a} \cdot \mathbf{I}_N$, $\mathbf{B} = \sqrt{b} \cdot \mathbf{I}_N$ 以及 $\mathbf{G} = 0$, 則可得

$$\mathbf{Q}_t := \bar{\mathbf{Q}} + a \cdot (\mathbf{z}_{t-1} \mathbf{z}'_{t-1} - \bar{\mathbf{Q}}) + b \cdot (\mathbf{Q}_{t-1} - \bar{\mathbf{Q}}).$$

這裡的 a 與 b 是非負數值, 且 a+b<1 以確保模型的穩定性及 \mathbf{Q}_t 的正定義。

對稱 DCC 模型 (aDCC)

給定 $\mathbf{A} = \sqrt{a} \cdot \mathbf{I}_N$, $\mathbf{B} = \sqrt{b} \cdot \mathbf{I}_N$ 以及 $\mathbf{G} = sgrtg \cdot \mathbf{I}_N$, 則可得

$$\mathbf{Q}_{t} := \bar{\mathbf{Q}} + a \cdot (\mathbf{z}_{t-1} \mathbf{z}'_{t-1} - \bar{\mathbf{Q}}) + b \cdot (\mathbf{Q}_{t-1} - \bar{\mathbf{Q}}) + g \cdot (z_{t-1}^{-} z'_{t-1} - \bar{\mathbf{Q}}^{-}).$$

這裡的 $a \setminus b$ 與g都是非負數值。

彈性 DCC 模型 (FDCC)

$$\mathbf{Q}_{t} := \left[\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}' - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a})' - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{b})' \right] \odot \bar{\mathbf{Q}}$$

$$+ (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a})' \odot \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' + + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{b})' \odot \mathbf{Q}_{t-1},$$

這裡的 \mathbf{a} 與 \mathbf{b} 是 s 維係數向量, \mathbf{J} 是 $N \times s$ 分組排除指標矩陣, 而 s 則是分組數。FDCC 模型設定容許多個分組之間有不同的 DCC 係數, 因而較有彈性。

3.3 利率模型 29

3.3 利率模型

各種不同期限的即期利率是利率曝險的主要風險因子,由於不同期限的即期利率之間具有所謂的「利率期限結構」理論關係,我們不應再採用之前處理不同幣別股權曝險與外匯曝險的方式處理即期利率,亦即我們不應將不同期限的即期利率分別設爲隨機變量後再採行建立在統計變異數與共變數上的多變量實證模型,而應嘗試將不同期限的即期利率組裝爲一個函數(亦即利率期限結構曲線),先以橫斷面的不同期限即期利率資料估計利率期限結構函數的基本參數,得到跨越多個時點的參數估計值後再使用時間序列統計方法估計這些參數估計值的跨時動態關係,以作爲預測未來利率期限結構以及所屬即期利率的基礎,接下來我們將詳細說明利率實證模型的這種設定模式。

我們假設期限 T 不同的即期利率 $R_t(T)$ 遵守 Nelson and Siegel 利率期限結構模型如下:

$$R_t(T) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \cdot T}}{\lambda_t \cdot T}\right) + \beta_{3t} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \cdot T}}{\lambda_t \cdot T} - e^{-\lambda_t \cdot T}\right) + \varepsilon_t(T), \tag{3.1}$$

其中 β_{1t} , β_{2t} , β_{3t} , 以及 λ_t 均爲因時而變且未知的參數, 此式中的第一項代表即期利率的長期水準值 (Level),第二項代表即期利率的斜率 (Slope),其所呈現的是短期利率的行爲,第三項代表即期利率的曲度 (Curvature),其所呈現的是中期利率的行爲,而 β_{1t} , β_{2t} , β_{3t} 參數分別代表長、短、中期曲線的權重,至於 λ_t 係數的作用則在於控制 斜率與曲度所涵蓋之期間範圍的大小,亦即短期與中期之期間範圍的大小, λ_t 值越大,短期與中期之期間就越短。 Nelson-Seigel 利率期限結構模型的相關文獻包括 Nelson and Siegel (1987), Christensen, Diebold, and Rudebusch (2009),以及 BIS (2005)。

每月月底資料的橫斷面估計

跨月的時間序列估計及樣本外的預測

我們可對每月月底單日的 M 筆橫斷面即期利率資料進行兩步加權最小平方法估計,將所獲得的 Nelson and Siegel 模型參數估計值 $\hat{\beta}_{1t}$, $\hat{\beta}_{2t}$, $\hat{\beta}_{3t}$, 與 $\hat{\lambda}_t$ 置於 4 維參數估計值向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_t' = \left[\hat{\beta}_{1t} \ \hat{\beta}_{2t} \ \hat{\beta}_{3t} \ \hat{\lambda}_t\right]$ 中,就可由總共 N 個月的月底單日利率資料導出 N 個參數估計值向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_t'$, $t=1,2,\ldots,N$,接下來我們將這些參數估計值向量視爲時間序列 VAR(1) 模型的估計:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_t' = \boldsymbol{\pi}' + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}' \boldsymbol{\Pi} + \mathbf{u}_t, \qquad t = 1, 2, \dots, N, \tag{3.2}$$

在 $\mathbf{u}_t \sim (\mathbf{0}, \ \Sigma)$ 的假設下,我們採用採用比較穩健的 (Robust) 多維去邊最小平方法 (the multivariate Least Trimmed Squares Estimation), 或是在有問題時迴歸標準的最小平方估計法,以求導 VAR(1) 模型參數的估計值 $\hat{\boldsymbol{\pi}}'$ 、 $\hat{\boldsymbol{\Pi}}$ 與 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$,並隨之計算參數估計值向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_t$ 之樣本內最後一個月之樣本內預測值:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N}^{\prime} = \hat{\boldsymbol{\pi}}^{\prime} + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N-1}^{\prime} \hat{\boldsymbol{\Pi}}, \tag{3.3}$$

 $^{^{1}}$ 以台灣資料爲例,我們可由證券櫃檯買賣中心找到每天台灣公債各期限的利率資料,到期日 T 分別是 1 個月、3 個月、6 個月、1 年、1.5 年、1

²此法涉及去邊參數的設定,內建值設爲0.25,但可根據需要增減。

30 風險模型

以及樣本外第一個月的樣本外預測值:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}' = \hat{\boldsymbol{\pi}}' + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N}' \hat{\boldsymbol{\Pi}}, \tag{3.4}$$

若將前式所獲之 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}$ 中的 $\tilde{\beta}_{1,N+1}$, $\tilde{\beta}_{2,N+1}$, $\tilde{\beta}_{3,N+1}$, 以及 $\tilde{\lambda}_{N+1}$ 代回 Nelson-Seigel 模型 (3.1) 式, 並以 0 替代該式中的誤差項 $\varepsilon_{N+1}(T)$, 便可據之求算期限爲任何 T 之即期利率之樣本外第一個月的預測值 $\tilde{R}_{N+1}(T)$ 。我們要指出,對於樣本內最後一月之期限爲 T_1, T_2, \ldots, T_M 的即期利率我們有樣本觀察值,但對於期限 T 不是 T_1, T_2, \ldots, T_M 的即期利率則無樣本觀察值,因而便需使用 (3.3) 式計算對應的預測值 $\tilde{R}_N(T)$ 。

給定即期利率的預測值 $\tilde{R}_{N+1}(T)$ 與 $\tilde{R}_{N}(T)$, 便可計算利率變動率

$$\Delta \tilde{R}_{N+1}(T) := \tilde{R}_{N+1}(T) - \hat{R}_N(T),$$

給定期限爲 T 之利率曝險 $v_N(T)$ 的樣本所涵蓋的 K 個期限爲 T_1', T_2', \ldots, T_K' ,各期限利率曝險 (採定期複利) 的 價格變動率:

$$y_{i,N+1} = \frac{\Delta B_{N+1}(T_i')}{B_N(T_i')} := -\frac{T \cdot \Delta \tilde{R}_{N+1}(T_i')}{1 + T \cdot \tilde{R}_N(T_i')},$$
(3.5)

將利率曝險樣本 $v_N(T_1')$, $v_N(T_2')$, ..., $v_N(T_K')$ 以及前式所計算之對應利率曝險的價格變動率 $y_{1,N+1}$, $y_{2,N+1}$, ..., $y_{K,N+1}$ 分別置於 K 維向量 \mathbf{v}_N 與 \mathbf{y}_{N+1} 中,便可計算利率曝險的可能損失:

$$L_{N+1} = -\mathbf{v}_N' \mathbf{y}_{N+1} = -\sum_{i=1}^K v_N(T_i') \cdot y_{i,N+1}.$$
 (3.6)

前述利率實證模型設定所包含的隨機項有二,分別是 Nelson and Siegel 期限結構模型 (3.1) 式的誤差項與 VAR(1) 模型 (3.2) 式的誤差項,縱使我們假設這兩組誤差項都是常態分配隨機項,由於 Nelson and Siegel 期限結構模型是其參數 (2.5) 式更是這些誤差項之高度非線性函數,我們因而無法確認利率曝險變動率 (2.5) 式更是這些誤差項之高度非線性函數,我們因而無法確認利率曝險變動率 (2.5) 不是常態分配,故利率風險無法像匯率風險一樣,直接利用常態分配公式求導風險值,必須採用蒙地卡羅模擬求導損失分配以及對應的風險值。

蒙地卡羅模擬的執行步驟:

1. 對 VAR(1) 模型 (3.2) 式的變異數共變數矩陣估價值 $\hat{\Sigma}$ 進行 Cholesky 分解 A,將之前乘電腦產生的 4 維標準常態分配的隨機模擬值向量,便可得到 VAR(1) 模型 (3.2) 式之誤差項的常態分配模擬值 $\mathbf{u}^{(s)}$,再將之加入 (3.4) 式:

$$\boldsymbol{\theta}_{N+1}^{(s)\prime} = \hat{\boldsymbol{\pi}}' + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N}' \hat{\boldsymbol{\Pi}} + \mathbf{u}^{(s)},$$

便可得到樣本外第一個月的參數模擬值 $\boldsymbol{\theta}_{N+1}^{(s)\prime} = \left[\beta_{1,N+1}^{(s)} \ \beta_{2,N+1}^{(s)} \ \beta_{3,N+1}^{(s)} \ \lambda_{N+1}^{(s)}\right]$,其中上標 (s) 代表第 s 回模擬值,前式等號右邊 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 向量所包含的是樣本內最後一個月的 Nelson and Siegel 模型參數估計值 $\hat{\beta}_{1N}$, $\hat{\beta}_{2N}$, $\hat{\beta}_{3N}$,與 $\hat{\lambda}_N$ 。

2. 將 Nelson and Siegel 期限結構模型參數模擬值 $\boldsymbol{\theta}_{N+1}^{(s)\prime} = \left[\begin{array}{ccc} \beta_{1,N+1}^{(s)} & \beta_{2,N+1}^{(s)} & \beta_{3,N+1}^{(s)} & \lambda_{N+1}^{(s)} \end{array} \right]$ 代入 (3.1) 式:

$$R_{N+1}^{(s)}(T) = \beta_{1,N+1}^{(s)} + \beta_{2,N+1}^{(s)} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{N+1}^{(s)} \cdot T}}{\lambda_{N+1}^{(s)} \cdot T}\right) + \beta_{3,N+1}^{(s)} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{N+1}^{(s)} \cdot T}}{\lambda_t \cdot T} - e^{-\lambda_{N+1}^{(s)} \cdot T}\right),$$

便可得到樣本外第一個月之任意期限 T 的即期利率模擬值 $R_{N+1}^{(s)}(T)$ 。此外,我們尚需樣本內最後一個月之任意期限 T 的即期利率 $R_N(T)$,若期限 T 屬於期限樣本,則 $R_N(T)$ 便是直接觀察到的樣本值,但若期限 T 不屬於期限樣本,我們便將採用如下方式估計之

$$R_N(T) = \hat{\beta}_{1N} + \hat{\beta}_{2N} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\hat{\lambda}_N \cdot T}}{\hat{\lambda}_N \cdot T}\right) + \hat{\beta}_{3N} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\hat{\lambda}_N \cdot T}}{\hat{\lambda}_t \cdot T} - e^{-\hat{\lambda}_N \cdot T}\right),$$

3.3 利率模型 31

3. 根據前一步所得到的樣本外第一個月以及以及樣本內最後一個月之任意期限 T 的即期利率模擬值 $R_{N+1}^{(s)}(T)$ 與 $R_N(T)$,我們便可計算樣本外第一個月之利率變動率的模擬值:

$$\Delta R_{N+1}^{(s)}(T) = R_{N+1}^{(s)}(T) - R_N(T),$$

再根據 (3.5) 與 (3.6) 式分別求導各期限利率曝險的價格變動率的模擬值

$$y_{i,N+1}^{(s)} = -\frac{T \cdot \Delta R_{N+1}^{(s)}(T_i')}{1 + T \cdot R_N(T_i')},$$

與可能損失的模擬值

$$L_{N+1}^{(s)} = -\sum_{i=1}^{K} v_N(T_i') \cdot y_{i,N+1}^{(s)}.$$

重複前述步驟 10 萬次便可得到用來逼近利率曝險的損失分配之可能損失 $L_{N+1}^{(s)}$ 的直方圖, 並可導出任何信賴水準的風險值, 例如: 若將 10 萬個可能損失的模擬值 $L_{N+1}^{(s)}$ 由小到大排列, 則倒數第 1000 個模擬值便是信賴水準爲 99% 的風險值。

參考文獻:

Bank for International Settlements, 2005, "Zero-Coupon Yield Curve: Technical Documentation," BIS Papers No. 25, Basel, Bank for International Settlements.

Christensen, J., Diebold, F. X., and Rudebusch, G.D., 2009, "An Arbitrage-Free Generalized Nelson-Siegel Term Structure Model," *Econometrics Journal*, 12, 33–64.

Nelson, C. and Siegel, A. F., 1987, "Parsimonious Modeling of Yield Curves," Journal of Business, 60, 473-489.